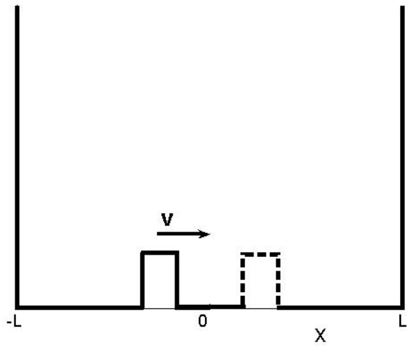
ლანდაუ-ზენერის ტუნელირება ორორმოიან პოტენციალში

ზენერის ტუნელირების ანალოგის განსახორციელებლად ორორმოიან პოტენციალში დაგვჭირდება შემდეგი სცენარის განხორციელება, როცა ბარიერი მოძრაობს რაღაც სიჩქარით სიმეტრიის მდგომარეობის გავლით (იხილეთ ნახაზი).



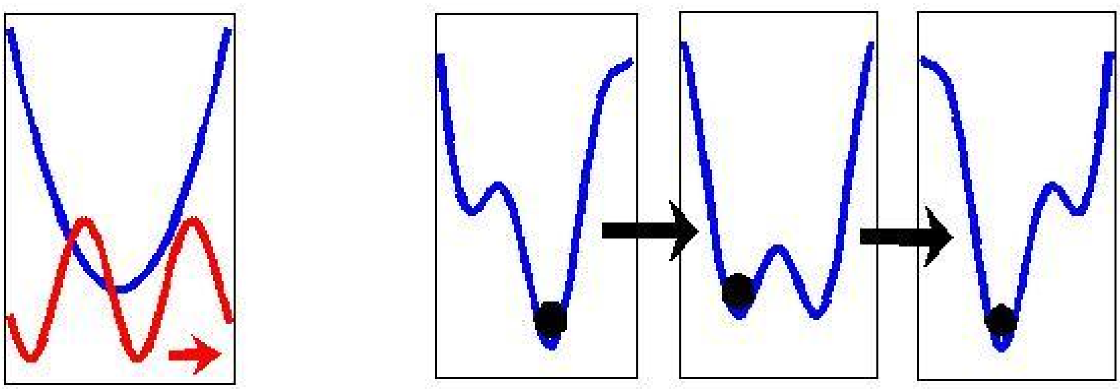
ამ შემთხვევაში წინა ლექციაში მოცემული შრედინგერის განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-V(x-\mathrm{v}t)\Psi=0 \qquad (1)$$

სადაც სიმარტივისთვის და ანალიზური გამოთვლების მოხერხებულობისთვის პოტენციალს ავიღებთ შემდეგი სახით:

$$V(x-\mathrm{v}t)=\frac{W_0}{\cosh(x-\mathrm{v}t)}.$$

რეალისტურ სისტემებში (ბოზე-აინშტაინის კონდენსატები) ასეთი სცენარი შეიძლება განხორციელდეს ჰარმონიული პოტენციალის და ოპტიკური მოძრავი ტალღის ზედდებით. ამ



შემთხვევაში: $V(x,t)=\omega x^2+\cos(x-\alpha t)$. ორივე ამ შემთხვევაში განხილვის ფორმები მსგავსია, ამიტომ ჩვენ უფრო მარტივი პირველი მაგალითით (მართკუთხოვანი ორორმოიანი პოტენციალი) შემოვიფარგლებით.

მიახლოებაში, როცა $\mathrm{v}t$ მცირე სიდიდეა, ჩვენ შეგვიძლია გავშალოთ პოტენციალი ორ შესაკრებად:

$$V(x,t)=\frac{W_0}{\cosh[x-\mathrm{v}t]}\cong W_0\left[\frac{1}{\cosh[x]}+\mathrm{v}t\frac{\sinh[x]}{\cosh^2[x]}\right] \qquad (2)$$

სადაც პირველი შესაკრები სიმეტრიულია x=0 წერტილის მიმართ, ხოლო მეორე ანტისიმეტრიული. აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ უნდა ამოვხსნათ (1) განტოლება შემდეგი სასაზღვრო პირობით (რადგან უსასრულო ორმო გვაქვს):

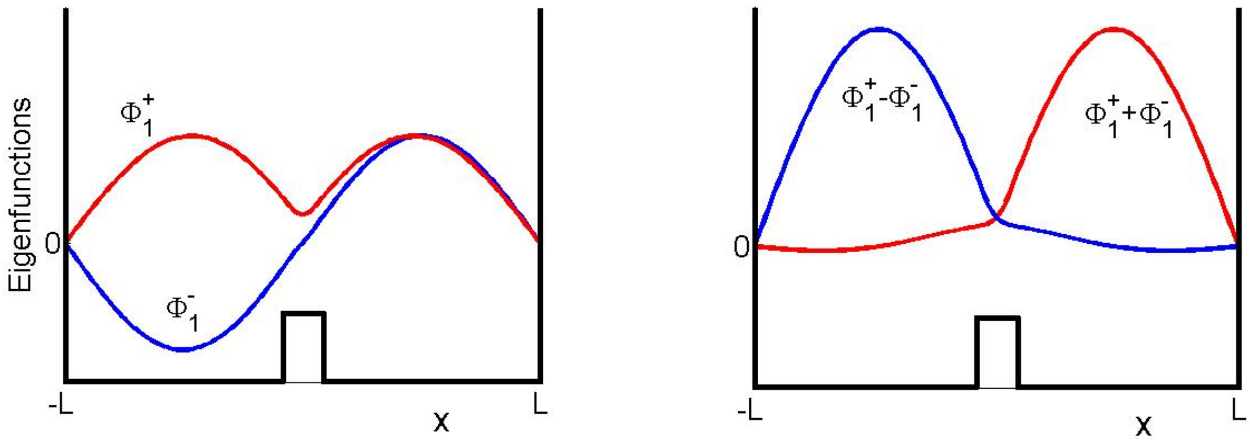
$$\Psi(-L,t)=\Psi(L,t)=0$$

და ამოცანა იხსნება შემდეგ დროით-სივრცულ ინტერვალში: $-t_0<t<t_0,\ -L<x<L$.

ამოცანას ვხსნით შეშფოთების თეორიით, ესე იგი ვგულისხმობთ, რომ პირველი შესაკრები პოტენციალის გაშლაში (2) გაცილებით მეტია მეორეზე, ესე იგი ტალღურ ფუნქციებს ისევ ვიღებთ სიმეტრიული ორორმოიანი პოტენციალისთვის და მივყვებით წინა ლექციაში დამუშავებულ სქემას. ესე იგი (1) განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\Psi(x,t)=\psi_1(t)\phi_1(x)+\psi_2(t)\phi_2(x) \tag{3}$$

სადაც $\phi_1(x)=\Phi_1^+(x)+\Phi_1^-(x)$ და $\phi_2(x)=\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x)$, და აქ $\Phi_1^+(x)$ და $\Phi_1^-(x)$ სიმეტრიული ორორმოიანი პოტენციალის შესაბამისი სტაციონარული ამოხსნებია, რომლებიც წინა ლექციაში განვიხილეთ და ნახაზზეც ვიმეორებთ:



ახლა როგორც წინა ლექციაში თუ ჩავსვამთ (3)-ს (1) –ში, გავამრავლებთ $\phi_1(x)$-ზე და გავაინტეგრებთ x-ით, მივიღებთ:

$$2i\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=\varepsilon\psi_1+\alpha\, t\psi_1+\beta\psi_2$$

მეორეს მხრივ კი თუ ჩავსვამთ (3)-ს (1)-ში, გავამრავლებთ $\phi_2(x)$-ზე და გავაინტეგრებთ x-ით, მივიღებთ:

$$2i\frac{\partial\psi_2}{\partial t}=\varepsilon\psi_2-\alpha\, t\psi_2+\beta\psi_1$$

ამ ორი განტოლების გამოსაყვანად გამოყენებულია შემდეგი ტოლობები და განმარტებები:

$$\int_{-L}^{L}\phi_1^2dx=\int_{-L}^{L}\phi_2^2dx=2, \qquad \varepsilon=\int_{-L}^{L}\left[\phi_1\frac{W_0}{\cosh(x)}\phi_1-\phi_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}\right]dx=\int_{-L}^{L}\left[\phi_2\frac{W_0}{\cosh(x)}\phi_2-\phi_2\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}\right]dx$$

$$\int_{-L}^{L}\phi_1\phi_2dx=0, \qquad \beta=\int_{-L}^{L}\left[\phi_1\frac{W_0}{\cosh(x)}\phi_2-\phi_1\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}\right]dx=\int_{-L}^{L}\left[\phi_2\frac{W_0}{\cosh(x)}\phi_1-\phi_2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}\right]dx,$$

$$\alpha=\mathrm{v}W_0\int_{-L}^{L}\left[\phi_1\frac{\sinh[x]}{\cosh^2[x]}\phi_1\right]dx=-\mathrm{v}W_0\int_{-L}^{L}\left[\phi_2\frac{\sinh[x]}{\cosh^2[x]}\phi_2\right]dx, \qquad \int_{-L}^{L}\left[\phi_1\frac{\sinh[x]}{\cosh^2[x]}\phi_2\right]dx=0$$

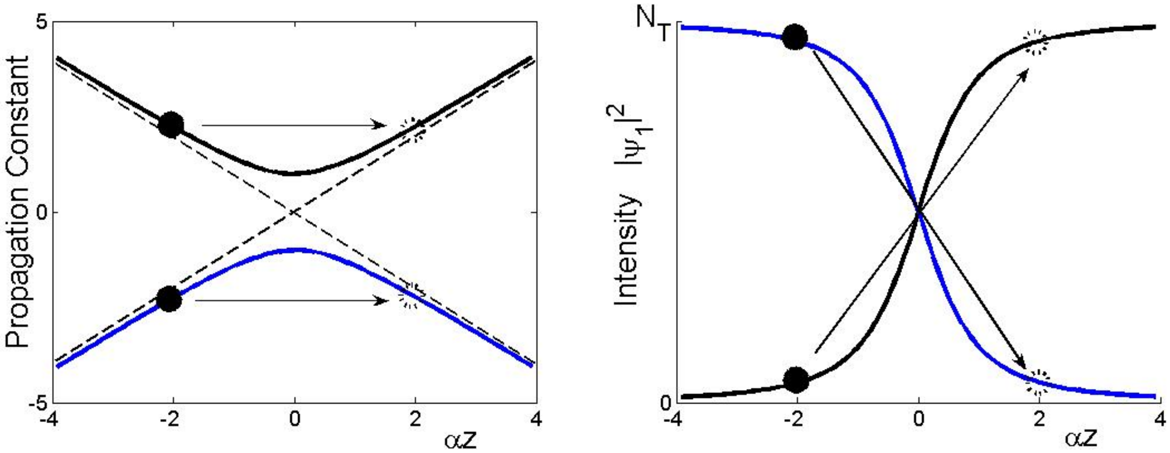
ახლა თუ გავაკეთებთ მარტივ გარდაქმნებს $\psi_1\to\psi_1\exp(-i\varepsilon t/2)$, $\psi_2\to\psi_2\exp(-i\varepsilon t/2)$, მივიღებთ:

$$2i\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=\alpha\, t\psi_1+\beta\psi_2 \qquad 2i\frac{\partial\psi_2}{\partial t}=-\alpha\, t\psi_2+\beta\psi_1 \tag{4}$$

ეს არის კრგად ცნობილი ლანდაუ-ზენერის ამოცანა, რომელიც ზუსტად იხსნება თუ დავუშვებთ, რომ როცა $t\to-\infty$ $|\psi_1|^2=1,\ \psi_2=0$. ამ შემთხვევაში როცა $t\to+\infty$, მაშინ ჩნდება გადასვლის ალბათობა

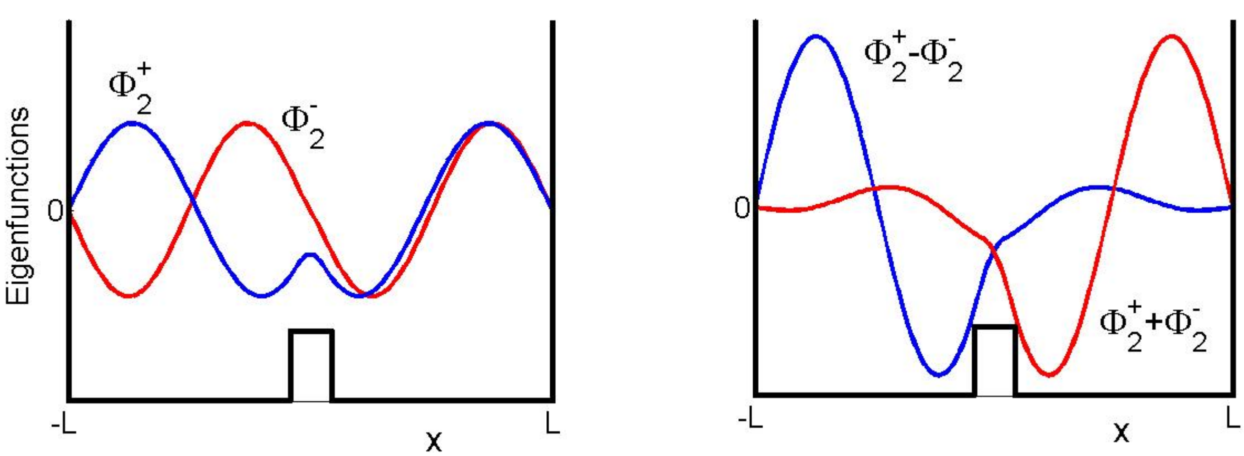
$$p=\exp\left(-\pi\beta^2/\alpha\right) \tag{5}$$

და $t\to+\infty$ შემთხვევაში $|\psi_1|^2=p,\ |\psi_2|^2=1-p$. ესე იგი რეალიზდება ქვემოთ მოყვანილ ნახაზებზე მოცემული სიტუაცია:



ჩვენი მიზანია შევამოწმოთ ლანდაუ-ზენერის ფორმულა რამდენად გამოსადეგია (1) განტოლებით მოცემული სიტუაციისთვის ორორმოიანი პოტენციალის შემთხვევაში, როდესაც მოძრავი ბარიერი გვაქვს. ესე იგი უნდა გავაკეთოთ რიცხვითი სიმულაციები შრედინგერის განტოლებაზე და შევაფასოთ გადასვლის ალბათობის ფორმულის სამართლიანობა.

ამაზე ცოტათი უფრო რთული ამოცანაც შეიძლება განიხილოს კაცმა, თუ გავიხსენებთ, რომ გარდა $\Phi_1^+(x)$ და $\Phi_1^-(x)$ ტალღური ფუნქციებისა კიდევ გვაქვს სხვა ტალღური ფუნქციებიც, რომლებიც უფრო მაღალ ენერგეტიკულ მდგომარეობებს შეესაბამება. კერძოდ ქვემოთ მოყვანილია შემდეგი ენერგეტიკული დონეების შესაბამისი სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ფუნქციები $\Phi_2^+(x)$ და $\Phi_2^-(x)$:



მაშინ მთლიანი ტალღური ფუნქცია უნდა წარმოვადგინოთ შემდეგი ჯამის სახით:

$$\Psi(x,z)=\psi_1(z)\phi_1(x)+\psi_2(z)\phi_2(x)+\psi_3(z)\phi_3(x)+\psi_4(z)\phi_4(x)$$

სადაც $\phi_1=\Phi_1^+ + \Phi_1^-$ $\phi_2=\Phi_1^+ - \Phi_1^-$ $\phi_3=\Phi_2^+ + \Phi_2^-$ $\phi_4=\Phi_2^+ - \Phi_2^-$ მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს (რომლებიც შესამოწმებელია)

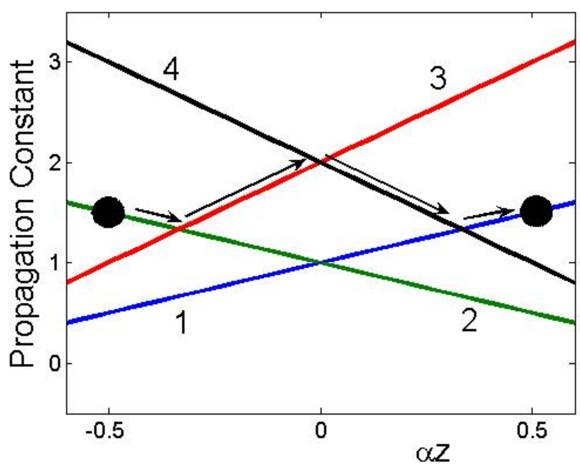
$$i\,\partial\psi_1/\partial z=\varepsilon_1\psi_1+\alpha_1 z\psi_1+\mathrm{w}_{12}\psi_2+\mathrm{w}_{14}\psi_4$$

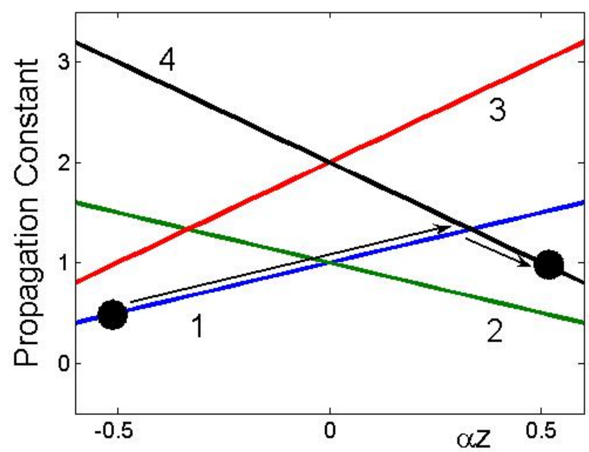
$$i\,\partial\psi_2/\partial z=\varepsilon_1\psi_2-\alpha_1 z\psi_2+\mathrm{w}_{12}\psi_1+\mathrm{w}_{23}\psi_3$$

$$i\,\partial\psi_3/\partial z=\varepsilon_2\psi_3+\alpha_2 z\psi_3+\mathrm{w}_{23}\psi_2+\mathrm{w}_{34}\psi_4$$

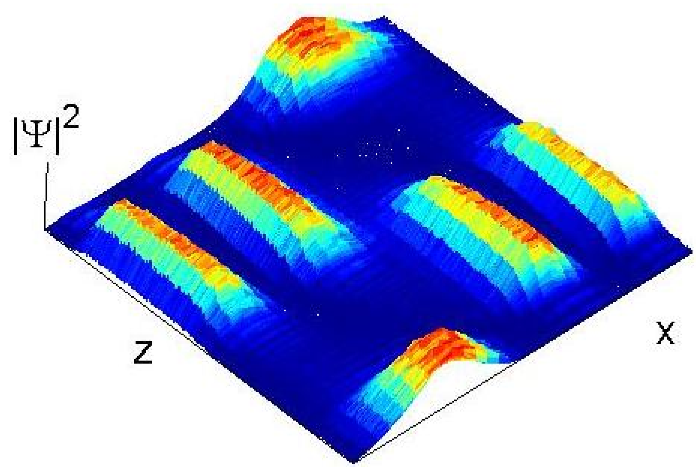
$$i\,\partial\psi_4/\partial z=\varepsilon_2\psi_4-\alpha_2 z\psi_4+\mathrm{w}_{14}\psi_1+\mathrm{w}_{34}\psi_3$$

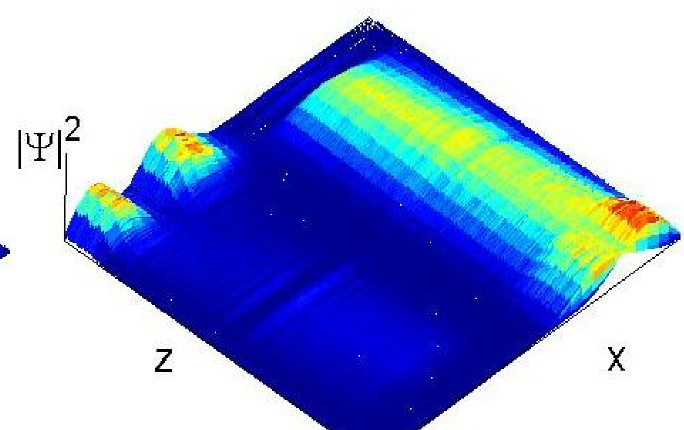
და განვიხილოთ გადასვლები არა მხოლოდ ϕ_1 და ϕ_2 მდგომარეობებს შორის, არამედ ϕ_1 და ϕ_4 ანდა ϕ_2 და ϕ_3 შორის მაგალითად ქვემოთ წარმოდგენილი ნახაზის მიხედვით





ანდა რაიმე სხვა სქემით, იმისდა მიხედვით რამდენია კოეფიციენტების მნიშვნელობები. კერძოდ ამ სქემას შემდეგი სიმულაციები შეესაბამება (1) განტოლებისა:





(1) განტოლების სიმულაციებისთვის გადააკეთეთ MATLAB-ის ფაილები [complex.m] და [complex1.m]