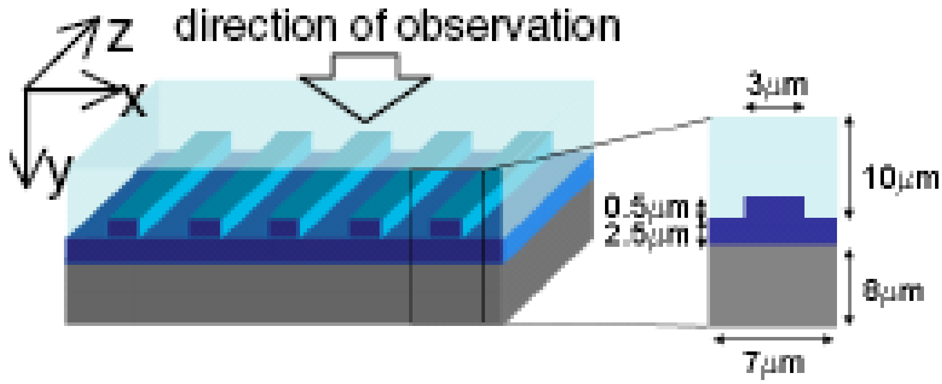
ბლოხის ოსცილაციები პერიოდულ ოპტიკურ სისტემებში

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი რეალური ფიზიკური სისტემისა – ესაა ოპტიკური სხივების გავრცელება პერიოდული გარდატეხის მაჩვენებლიან ფირფიტაში, რომლის სწემატური ნახაზიც მოცემულია ქვემოთ. აქ ითვლება, რომ გარდატეხის მაჩვენებლის პერიოდული ნაწილი მცირეა საშუალო გარდატეხის მაჩვენებელზე და ასეთ შემთხვევაში პრობლემა მარტივდება და დაიყვანება წინა ლექციებში განხილულ ქვანტურ მექანიკურ ამოცანებზე შემდეგი მსჯელობის საშუალებით:



სინათლის გავრცელება გარემოში, რომელშიც დენები და თავისუფალი მუხტები არაგვაქვს, აღიწერება შემდეგი მაქსველის განტოლებებით:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}; \quad \vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r},t) = 0; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad (1)$$

არამაგნიტურ გარემოში $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r},t)$ და ამავე დროს გვაქვს წრფივ მიახლოებაში $\vec{D}(\vec{r},t)$ ვექტორის კომპონენტებისთვის:

$$D_i = \chi_{ij}^{(1)} E_j$$

ახლა შევისწავლოთ ნახაზზე გამოხატული ფიზიკური შემთხვევა, როდესაც ფირფიტა მოთავსებულია zy სიბრტყეში და სინათლე პოლარიზებულია წრფივად x ღერძის გასწვრივ და გავრცელება ხდება ფირფიტის სიბრტყეში z ღერძის მიმართულებით. ამ შემთხვევაში თუ ავიღებთ როტორს (1) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლებიდან და გავითვალისწინებთ მეორე განტოლებას და აგრეთვე იმას, რომ არამაგნიტურ გარემოში $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r},t)$, მივიღებთ:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

რადგან ელექტრულ ველს მხოლოდ y კომპონენტა აქვს და აგრეთვე ველი y-ის გასწვრივ არ იცვლება (რადგან თხელი ფირფიტაა, ამიტომ შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ელექტრულ ველს ფირფიტის სისქეში ერთი ფიქსირებული მნიშვნელობა აქვს), ამიტომ $\vec{E}(\vec{r},t) \equiv E_y(y,z,t)$ და განტოლება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D_y(x,z,t)}{\partial t^2} = 0$$

სადაც, იმის გათვალისწინებით, რომ ელექტრულ ველს მხოლოდ y კომპონენტა გააჩნია, D ვექტორი შემდეგნაირად შეიძლება გადაიწეროს:

$$D_y = \left[\chi_0 + \varepsilon^2 \chi(x)\right] E_y$$

სადაც გავითვალისწინეთ მცირე პერიოდული ცვლა გარდატეხის მაჩვენებლისა და საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial z^2} - \frac{n_0^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon^2 \chi(x)}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (2)$$

სადაც $n_0 = \sqrt{\chi_0}$ წრფივი საშუალო გარდატეხის მაჩვენებელია. აქედან წრფივი დისპერსიის კანონი მარტივად გამომდინარეობს, თუ ბოლო მცირე წევრს გადავაგდებთ და ჩავთვლით, რომ სინათლის ტალღური ვექტორი z ღერძის გასწვრივაა მიმართული. ანუ თუ ჩავსვამთ წრფივი ტალღის ფორმას

$$E_y = \Psi e^{i(\omega t - kz)} + \Psi^* e^{-i(\omega t - kz)}$$

სადაც Ψ და Ψ^* ერთმანეთისადმი კომპლექსურად შეუღლებული მუდმივებია, მივიღებთ:

$$\omega = kc/n_0$$

გარდატეხის მაჩვენებლის პერიოდული ცვლის გავლენის შესასწავლად უნდა ჩავთვალოთ, რომ Ψ მუდმივი აღარაა და ნელ ცვლადებზეა დამოკიდებული. ამგვარად ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სტაციონარული ანზაცის სახით:

$$E_y = \Psi\left[\varepsilon x, \varepsilon^2 z\right] e^{i(\omega t - kz)} + \left(\Psi\left[\varepsilon x, \varepsilon^2 z\right]\right)^* e^{-i(\omega t - kz)};$$

სადაც, იქიდან გამომდინარე, რომ E_y ნამდვილია, გვაქვს $\Psi = (\Psi)^*$. ცვლადების სინელე გამოიხატება იმაში, Ψ-ის წარმოებულები მცირე სიდიდეებია, კერძოდ

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi \sim \varepsilon; \qquad \frac{\partial}{\partial z}\Psi \sim \varepsilon^2$$

ახლა თუ ჩავსვამთ ამას (2)-ში და გავუტოლებთ ერთმანეთს ერთნაირ ε-ის ხარისხებს, მივიღებთ თანმიმდევრობით განტოლებებს. კერძოდ, დავიწყოთ ნულოვანი მიახლოებით (ε-ის ნულოვანი ხარისხი), მაშინ მივიღებთ უკვე გამოყვანილ წრფივ დისპერსიის კანონს $\omega = kc/n_0$. ახლა გადავიდეთ პირველ მიახლოებაში (ε-ის პირველი ხარისხი) და გავითვალისწინოთ, რომ წარმოებულებს შემდეგი სიმცირეები გაუჩნდებათ

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial(\varepsilon^2 z)}\Psi_m; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Psi = \varepsilon \frac{\partial}{\partial(\varepsilon x)}\Psi$$

მაშინ ε-ის მეორე მიახლოებაში (ε^2-ის ხარისხი) ამ ხარისხის ამოკრებით და პერიოდული გარდატეხის მაჩვენებლიანი წევრის მხედველობაში მიღებით (რადგან ისიც ε^2-ის პროპორციულია) გვექნება:

$$\varepsilon^2\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial(\varepsilon x)^2} - 2ik\frac{\partial\Psi}{\partial(\varepsilon^2 z)} + \omega^2\frac{\chi(x)}{c^2}\Psi\right] = 0 \qquad (3)$$

ახლა თუ გადავნორმავთ ცვლადებს $\varepsilon x \to x$ და $\varepsilon^2 z \to 2kz$, მივიღებთ წინა ლექციაში განხილულის ანალოგიურ განტოლებას, სადაც დროის მაგივრობას სივრცული ცვლადი z ასრულებს, ხოლო პოტენციალის მაგივრად კი გარდატეხის მაჩვენებლის პერიოდული ნაწილი გვაქვს:

$$V(x) = -\omega^2 \frac{\chi(x)}{c^2}$$

ამრიგად თუ $\chi(x) = -c^2 a \cos^2 x/\omega^2$ პერიოდული ფუნქციაა (3) განტოლება საბოლოოდ გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$-i\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \Psi a \cos^2 y = 0 \qquad (4)$$

რომელიც ამოიხსნება ბლოხის ტალღების ფორმალიზმში. კერძოდ, ჯერ გადავნორმოთ $\Psi \to \Psi \exp[iaz/2]$ რის შედეგადაც (4) გადაიწერება როგორც

$$-i\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{a}{4}\left[e^{2ix} + e^{-2ix}\right] = 0 \qquad (5)$$

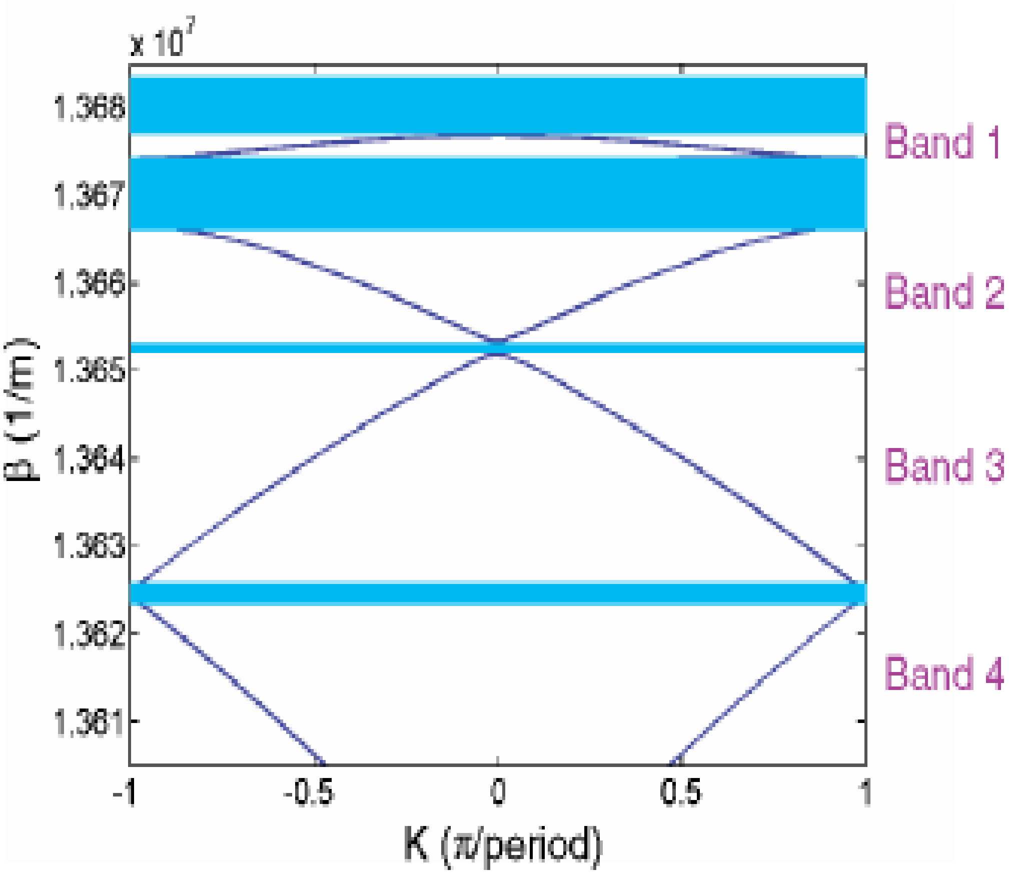
და ვეძებოთ ამონახსნი შემდეგნაირად:

$$\Psi = \sum_K \Phi_K e^{i(\beta z - Kx)}$$

ამის ჩასმით (5)-ში და მსგავსი ექსპონენტების გატოლებით მივიღებთ შემდეგ ბმულ უსასრულო ალგებრულ სისტემას:

$$\beta \Phi_K = K^2 \Phi_K + \frac{a}{4}\left[\Phi_{K+2} + \Phi_{K-2}\right] \qquad (6)$$

ამ განტოლებების ამოხსნით მივიღებთ ცნობილ ზონურ სტრუქტურას β-ს K-ზე დამოკიდებულებისა, რომელიც ნახაზზეა ნაჩვენები:



მარტივი მოსაზრებებით შეგვიძლია ანალიზურად დავინახოთ პირველი ორი band-ი. კერძოდ, თუ განვიხილავთ K-ს 1 თან ახლოს, კარგი სიზუსტით შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ მხოლოდ ორი განტოლებით (6)-დან:

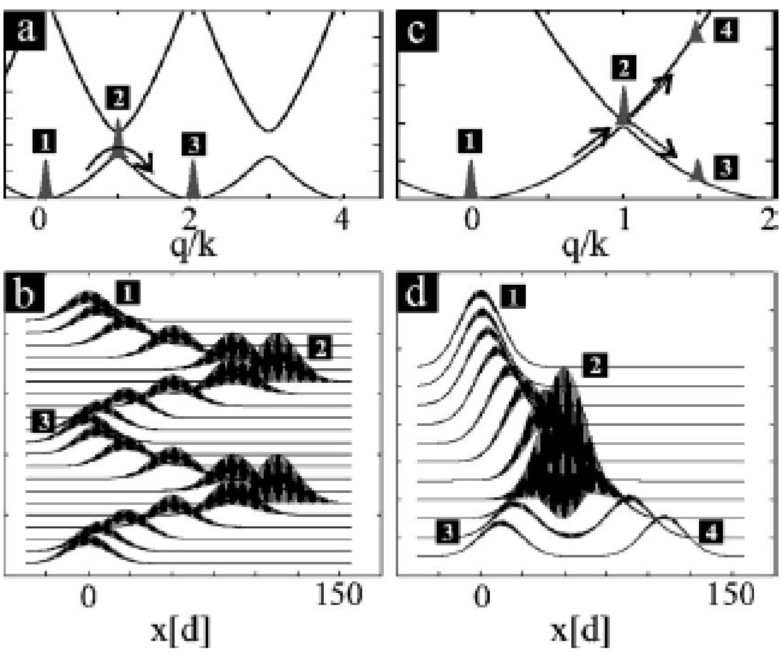
$$\beta\Phi_K = K^2\Phi_K + \frac{a}{4}\Phi_{K-2}$$

$$\beta\Phi_{K-2} = (K-2)^2\Phi_{K-2} + \frac{a}{4}\Phi_K$$

რისი ამოხსნაც კარგად აღწერს პირველ ორ band-ს $K=1$-თან ახლოს.

განსაკუთრებით საინტერესოა პერიოდულ პოტენციალში ბლოხის ოსცილაციები. კერძოდ, როდესაც პერიოდულ პოტენციალს ემატება წრფივი პოტენციალი და (4) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - a\cos^2 x + bx = 0 \tag{7}$$



კომპიუტერული სიმულაციები ბლოხის ოსცილაციებზე (7) განტოლების მიხედვით მოცემულია MATLAB-ის ფაილებში complexbloch.m და complexbloch1.m