

სასაზღვრო პირობები სხივის გავრცელებისა ფოტორეფრაქციულ გარემოში

წინა ლექციაში ჩვენ განიხილეთ ოპტიკური სხივის გავრცელება ფოტორეფრაქციულ გარემოში იმის გათვალისწინების გარეშე. თუ როგორია ამ სხივის წარმოშობის მექანიზმი, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, როგორ შედის და გამოდის სინათლის სხივი ამ გარემოში, ანუ როგორია სასაზღვრო პირობები შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებისა. ჩვენ ისევ ვსარგებლობთ იმავე განტოლებით სინათლის სხივის ელექტრული ველის E_x კომპონენტისათვის, როგორც წინა ლექციაში:

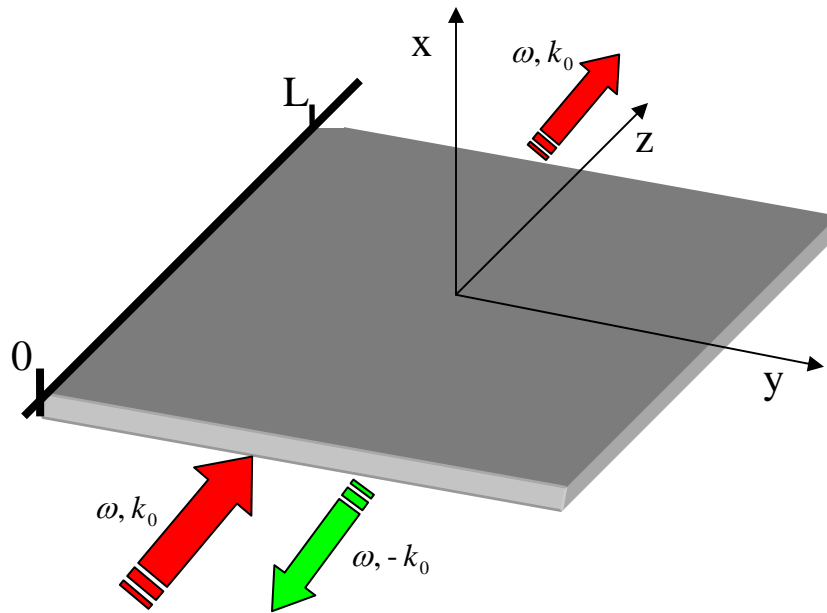
$$\frac{\partial^2 E_x(y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(y, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D_x(y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

სადაც, რეფრაქციულ გარემოში

$$D_x = \chi^{(1)} E_x + \chi^{(3)} (E_x)^3$$

ხოლო ვაკუუმში (საიდანაც შედის და გამოდის სხივი)

$$D_x = E_x.$$



ნახაზზე მოცემულია სქემატური გამოსახვა ფოტორეფრაქციულ გარემოში სინათლის სხივის შესვლისა და გამოსვლისა. მარტივი საჩვენებელია, რომ ვაკუუმში დისპერსიულ თანაფარდობას აქვს სახე:

$$\omega = \pm k_0 c$$

ანუ z ღერძის გასწვრივ გავრცელებული სხივი ხასიათდება სისშირით და ტალღური ვექტორის წყვილით ω, k_0 , ხოლო z -ის საპირისპიროდ გავრცელება შეგვიძლია დავახასიათოთ

$\omega, -k_0$ წყვილით. ქვედა წითელი ისარი ნახაზზე აჩვენებს შემავალ სხივს, რომლის რაღაც ნაწილი შედის სისტემაში და მეორე მხარეს გამოდის (მეორე წითელი ისარი ზევით) და რაღაც ნაწილი უკან ბრუნდება (მწვანე ისარი). ასეთ პირობებში შემავალი სხივის შესაბამისი ელექტრული ველის დაძაბულობა აღიწერება გამოსახულებით, რომელიც არის (1) დიფერენციალური განტოლების ამოსხნას ვაკუუმში, როცა ტალღური ვექტორი z ღერძის გასწვრივაა:

$$A_1 \cos(\omega t - k_0 z),$$

არეკვლილი სხივის (რომელმაც ვერ შეაღწია სისტემაში, მწვანე ისარი) შესაბამისი გამოსახულება არის:

$$B_1 \cos(\omega t + k_0 z),$$

ხოლო სხივის იმ ნაწილის ელექტრული ველის დაძაბულობა, რომელმაც შეაღწია სისტემაში და მეორე მხარეს ისევ ვაკუუმში გავიდა, აღიწერება ფორმულით:

$$A_2 \cos(\omega t - k_0 z).$$

ესე იგი ველის დაძაბულობა ვაკუუმში, როცა $z < 0$ იქნება:

$$E_x^0 = A_1 \cos(\omega t - k_0 z) + B_1 \cos(\omega t + k_0 z), \quad (2)$$

ხოლო $z > L$ -ისთვის (ისევე ვაკუუმში) იქნება

$$E_x^0 = A_2 \cos(\omega t - k_0 z). \quad (3)$$

ბუნებრივია, რომ ველის დაძაბულობები ვაკუუმში E_x^0 უნდა გადაეხას ველის E_x მნიშვნელობებს ფოტორეფრაქციულ გარემოში $z=0$ და $z=L$ წერტილებში. გადაბმის პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$E_x^0|_{z=0} = E_x|_{z=0} \quad \frac{\partial E_x^0}{\partial z}|_{z=0} = \frac{\partial E_x}{\partial z}|_{z=0} \quad E_x^0|_{z=L} = E_x|_{z=L} \quad \frac{\partial E_x^0}{\partial z}|_{z=L} = \frac{\partial E_x}{\partial z}|_{z=L} \quad (4)$$

E_x^0 -ისთვის ჩვენ გვაქვს მზა გამოსახულება (2) $z=0$ წერტილში ამიტომ გადაბმის პირობა ამ წერტილისთვის შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$(A_1 + B_1) \cos(\omega t) = E_x|_{z=0} \quad k_0(A_1 - B_1) \sin(\omega t) = \frac{\partial E_x}{\partial z}|_{z=0}$$

თუ ახლა პირველ განტოლებას გავაწარმოებთ დროით, გავყოფთ c -ზე და გამოვაკლებთ მეორეს, აგრეთვე გავითვალისწინებთ დისპერსიულ თანაფარდობას ვაკუუმში $\omega = k_0 c$, საბოლოოდ მივიღებთ გადაბმის პირობას $z=0$ წერტილში:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}|_{z=0} = 2k_0 A_1 \sin(\omega t) + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}|_{z=0}. \quad (5)$$

ანალოგიურად (3)-ის და (4)-ის გამოყენებით შეიძლება მივიღოთ გადაბმის პირობა $z=L$ წერტილში:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}|_{z=L} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}|_{z=L}. \quad (6)$$

ახლა უკვე ჩვენ შეგვიძლია ჩავატაროთ რიცხვითი სიმულაციები (1) განტოლების გამოყენებით, მაგრამ წინასწარ უნდა მოვახდინოთ დისკრეტიზაცია სივრცული კოორდინატების მიხედვით, რათა MATLAB-ში საქმე გვქონდეს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემასთან. კერძოდ, შევნიშნოთ, რომ z იცვლება 0-დან L -მდე და ეს მონაკვეთი გავყოფთ N ნაწილად ბიჯით a . მაშინ გვექნება $z=ma$, სადაც m იცვლება 0-დან N -მდე. სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ ნიმუში კვადრატული ფორმისაა, და მაშინ იგივე შეიძლება ჩაიწეროს y ცვლადის დისკრეტიზაციისთვისაც $y=na$ სადაც n -იც 0-დან N -მდე იცვლება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ სივრცული კოორდინატით კერძო წარმოებულები $(y, z) = (na, ma)$ წერტილში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial^2 E_x(y, z, t)}{\partial y^2} = \frac{E_x(na + a, ma, t) + E_x(na - a, ma, t) - 2E_x(na, ma, t)}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x(y, z, t)}{\partial z^2} = \frac{E_x(na, ma + a, t) + E_x(na, ma - a, t) - 2E_x(na, ma, t)}{a^2}$$

და თუ ახლა აღვნიშნავთ $E_x^{n,m} = E_x(na, ma, t)$ საბოლოოდ მივიღებთ $n \times m$ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{a^2 n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[E_x^{n,m} + \frac{\chi^{(3)}}{n_0^2} (E_x^{n,m})^3 \right] = \left[E_x^{n+1,m} + E_x^{n-1,m} - 2E_x^{n,m} \right] + \left[E_x^{n,m+1} + E_x^{n,m-1} - 2E_x^{n,m} \right] \quad (7)$$

ამასთან უნდა გვახსოვდეს, რომ დისკრეტიზაცია ისე უნდა მოვახდინოთ, რომ მაგალითად $E_x^{n+1,m} - E_x^{n,m} \ll [E_x^{n,m}]_{\max}$.

ყველაფერი ნორმალურადაა გარდა წერტილებისა $n=0, n=N, m=0$ და $m=N$, ამ წერტილებში მიღებული განტოლების მარჯვენა მხარეს პრობლემები იქმნება, იმიტომ რომ მაგალითად $n=0$ -თვის $E_x^{n-1,m}(t)$ არ არის განსაზღვრული. მისი განმარტებისთვის გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები y ღერძის გასწვრივ, ანუ ვუშვებთ, რომ z -ის გასწვრივ გავრცელებული სხივი მოთავსებულია $y=0$ და $y=L$ წრფეებს შორის ანუ სხვა სიტყვებით, სხივი ამ საზღვრებიდან არ გამოდის. ეს კი თავის მხრივ ნიშნავს, რომ $E_x^{-1,m}(t) = 0$ და $E_x^{N+1,m}(t) = 0$. აქედან გამომდინარე (7) განტოლებები $n=0, n=N$ წერტილებში შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[E_x^{0,m} + \frac{\chi^{(3)}}{n_0^2} (E_x^{0,m})^3 \right] = [E_x^{1,m} - 2E_x^{0,m}] + [E_x^{0,m+1} + E_x^{0,m-1} - 2E_x^{0,m}]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[E_x^{N,m} + \frac{\chi^{(3)}}{n_0^2} (E_x^{N,m})^3 \right] = [E_x^{N-1,m} - 2E_x^{N,m}] + [E_x^{N,m+1} + E_x^{N,m-1} - 2E_x^{N,m}]$$

ჩვენ აქ გავაკეთოთ დროის მასშტაბის შეცვლა $\tau = ct/an_0$.

გადავიდეთ ახლა სასაზღვრო პირობებზე z ღერძის გასწვრივ, ესე იგი $m=0$ და $m=N$ (ანუ $z=0$ და $z=L$) წერტილებისთვის გამოსათვლელია $E_x^{n,-1}$ და $E_x^{n,N+1}$. ამისთვის ჩავწეროთ (5) და (6) სასაზღვრო პირობები შემდეგნაირად:

$$E_x^{n,0}(t) - E_x^{n,-1}(t) = 2ak_0 A_1 \sin(\omega t) + \frac{a}{c} \frac{\partial E_x^{n,0}(t)}{\partial t} \quad E_x^{n,N+1}(t) - E_x^{n,N}(t) = -\frac{a}{c} \frac{\partial E_x^{n,N}(t)}{\partial t}$$

ანუ საძიებელი წერტილებისთვის გვექნება:

$$E_x^{n,-1}(t) = E_x^{n,0}(t) - 2ak_0 A_1 \sin(\omega t) - \frac{a}{c} \frac{\partial E_x^{n,0}(t)}{\partial t} \quad E_x^{n,N+1}(t) = E_x^{n,N}(t) - \frac{a}{c} \frac{\partial E_x^{n,N}(t)}{\partial t}$$

ანუ $m=0$ და $m=N$ წერტილებისთვის დიფერენციალური განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[E_x^{n,0} + \frac{\chi^{(3)}}{n_0^2} (E_x^{n,0})^3 \right] = [E_x^{n+1,0} + E_x^{n-1,0} - 2E_x^{n,0}] + [E_x^{n,1} - E_x^{n,0}] - 2ak_0 A_1 \sin(\omega an_0 \tau / c) - \frac{1}{n_0} \frac{\partial E_x^{n,0}}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[E_x^{n,N} + \frac{\chi^{(3)}}{n_0^2} (E_x^{n,N})^3 \right] = [E_x^{n+1,N} + E_x^{n-1,N} - 2E_x^{n,N}] + [E_x^{n,N-1} - E_x^{n,N}] - \frac{1}{n_0} \frac{\partial E_x^{n,N}}{\partial \tau}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $R^{n,m} = \partial E_x^{n,m} / \partial \tau$ განტოლებები უკვე დაიყვანება პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებზე სადაც საწყისი პირობები ელემენტარული შეგვიძლია ავიღოთ:

$$R^{n,m}(\tau = 0) = E_x^{n,m}(\tau = 0) = 0$$

და ამ განტოლებებით უკვე შეგვიძლია გავაკეთოთ სიმულაციები MATLAB-ში.