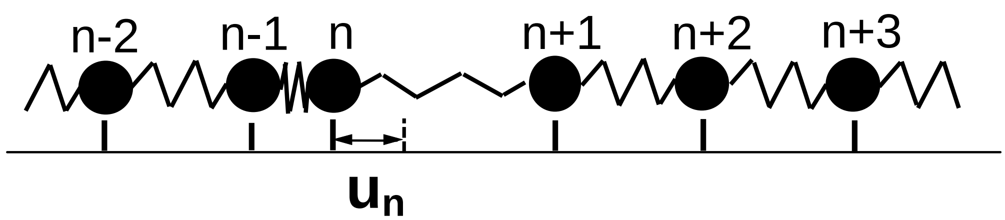
მექანიკური სისტემები – ფერმი-პასტა-ულამის ჯაჭვი **(FPU chain)**

ქვემოთ მოყვანილი სქემატური სურათის შესაბამისად უნდა დაიწეროს განტოლებები ყველა ბურთულას გადახრისათვის. n-ური ბურთულის გადახრა წონასწორული მდგომარეობიდან აღვნიშნოთ u_n-ით. ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ ზამბარის შეკუმშვისას ან გაჭიმვისას აღძრული ძალა შემდეგნაირადაა დამოკიდებული დეფორმაციის სიდიდეზე: $F=-dE/dx=-kx-k_3x^3$, სადაც k ჰუკის კონსტანტაა, ხოლო k_3 კი არაწრფივი კონსტანტა. მაშინ ნიუტონის მეორე კანონი n-ური ბურთულისთვის შემდეგნაირად დაიწერება:



$$m\frac{d^2u_n}{dt^2}=k\left(u_{n+1}-u_n\right)+k\left(u_{n-1}-u_n\right)+k_3\left(u_{n+1}-u_n\right)^3+k_3\left(u_{n-1}-u_n\right)^3$$

სადაც m ბურთულის მასაა. ახლა თუ შევცვლით $t\to t\sqrt{m/k}$, $u_n\to u_n\sqrt{k/k_3}$, საბოლოოდ მივიღებთ n მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემას უგანზომილებო ცვლადებით:

$$\frac{d^2u_n}{dt^2}=\left(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n\right)+\left(u_{n+1}-u_n\right)^3+\left(u_{n-1}-u_n\right)^3 \qquad (1)$$

ამ საბოლოო სახით გვხვდება ხოლმე ეს განტოლება ლიტერატურაში.

უპირველეს ყოვლისა, მოვიცილოთ არაწრფივი კუბური წევრები და ვნახოთ რა ყოფაქცევა აქვს გაწრფივებულ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d^2u_n}{dt^2}=u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n \qquad (2)$$

ანუ ვიპოვოთ მისი მახასიათებელი დისპერსიული თანაფარდობა. ამისთვის წარმოვადგინოთ u_n შემდეგი სახით:

$$u_n=\varphi\cos(pn-\omega t)=(\varphi/2)\left(e^{i(pn-\omega t)}+e^{-i(pn-\omega t)}\right)$$

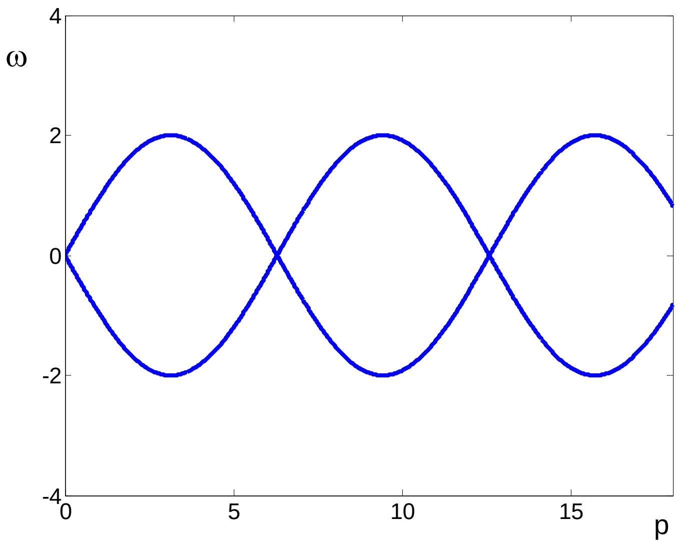
(სადაც φ მუდმივაა) და ჩავსვათ (2) განტოლებაში. ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n=(\varphi/2)\left[e^{i(pn-\omega t)}\left(e^{ip}+e^{-ip}-2\right)+e^{-i(pn-\omega t)}\left(e^{ip}+e^{-ip}-2\right)\right]=$$
$$=-(\varphi/2)\left[4\left(1-\cos p\right)\cos\left(pn-\omega t\right)\right]$$

მაშინ მივიღებთ დისპერსიულ თანაფარდობას:

$$\omega^2=2(1-\cos p)$$

ეს დისპერსიული მრუდი მოცემულია ნახაზზე. როგორც ვხედავთ, ამ სისტემის დისპერსიას "ზუნებრივი" ღრეჩო არა აქვს, დისპერსია მხოლოდ ზემოდან და ქვემოდან არის შემოსაზღვრული, ანუ სიხშირე ω-ს არ შეუძლია მიიღოს 2-ზე მეტი და -2-ზე ნაკლები მნიშვნელობები. ესე იგი სისტემას აქვს მაღალსიხშირული (ეგრეთ წოდებული "cutoff") ღრეჩო $|\omega|>2$, რაც ფერმი-პასტა-ულამის მოდელის დისკრეტულობასთანაა დაკავშირე-ბული. ღრეჩოების მდებარეობა ინფორმაციას გვაძლევს, თუ რა სიხშირეებითაა შესაძლებელი სისტემის აღგზნება. ესე იგი თუ ჩვენ ვამოძრავებთ ჯაჭვის ერთ ბოლოს $\omega<2$ სიხშირით, მაშინ სისტემაში აღიძვრება ტალღები და ენერგიაც შევა, საწინააღმდეგო შემთხვევაში კი მხოლოდ პირველი რამდენიმე ბურთულა დაიწყებს რხევას, ხოლო სხვა დანარჩენები თითქმის უძრავნი დარჩებიან. ამის დემონსტრაციისთვის თან ვურთავ MATLAB-ის ფაილებს fputest.m და fputest1.m.



სასაზღვრო პირობები

1. დირიხლეს სასაზღვრო პირობა

რიცხვითი სიმულაციებისთვის მნიშვნელოვანია სასაზღვრო პირობის ცოდნა მოცემული ამოცანისთვის. მაგალითად (1) სისტემა ჩაწერილია $n=1$-დან N ბურთულამდე და მართლაც შეგვიძლია ვისარგებლოთ (1) განტოლებებით ოღონდ $n=2$-დან $N-1$-მდე, რადგან განტოლებაში შედის u_{n+1}, რომელიც არაა განსაზღვრული თუ $n=N$. ეს პრობლემა ადვილად მოიხსნება, თუ ჩავთვლით, რომ $N+1$ ბურთულა ხისტადაა მიბმული კედელზე, ხოლო 0-ოვან ბურთულას კი ვარხევთ ჰარმონიულად. ეს იმას ნიშავს, რომ სასაზღვრო პირობები ჩაიწერება ასე: $u_0=\cos(\omega t)$; $u_{N+1}=0$. ასეთ პირობებს დირიხლეს სასაზღვრო პირობები (Dirichlet boundary conditions) ეწოდება. კონტინუალურ მიახლოებაში ეს პირობები თითქმის იგივენაირად იწერება: $u(n=0)=\cos(\omega t)$; $u(N+1)=0$. ამგვარად მთლიანი სისტემა თავისი სასაზღვრო პირობებით შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\frac{d^2u_n}{dt^2}=\left(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n\right)+\left(u_{n+1}-u_n\right)^3+\left(u_{n-1}-u_n\right)^3 \qquad \text{როცა} \quad n=2\text{-იდან } N-1\text{-მდე}$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}=\left(u_2+\cos(\omega t)-2u_1\right)+\left(u_2-u_n\right)^3+\left(\cos(\omega t)-u_n\right)^3$$

$$\frac{d^2u_N}{dt^2}=\left(0+u_{N-1}-2u_N\right)+\left(0-u_N\right)^3+\left(u_{N-1}-u_N\right)^3$$

ახლა MATLAB-ში სიმულაციების გასაკეთებლად ეს მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებები პირველ რიგის დიფერენციალურ განტოლებებად უნდა გადავაკეთოთ. მაგალითად *n=2,... N-1* ბურთულებისთვის:

$$\frac{du_n}{dt} = v_n \qquad \frac{dv_n}{dt} = \left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right) + \left(u_{n+1} - u_n\right)^3 + \left(u_{n-1} - u_n\right)^3$$

და ანალოგიურად სასაზღვრო n=1 და $n=N$ –ისთვის.

2. ნოიმანის სასაზღვრო პირობა:

სხვანაირი სასაზღვრო პირობაა დასადები თუ ჯაჭვის ბოლო (ესე იგი N-ური ბურთულა) დაბმული კი არა არამედ თავისუფლადაა. მაშინ ბოლო ბურთულაზე მარჯვნიდან ძალა არ მოქმედებს და მაშინ N-ური ბურთულისთვის განტოლება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\frac{d^2u_N}{dt^2} = \left(u_{N-1} - u_N\right) + \left(u_{N-1} - u_N\right)^3$$

ამ ჩანაწერს ახლა თუ შევადარებთ (1)-ს შევამჩნევთ, რომ ეს განტოლება (1)-დან მიიღება $n=N$-ისთვის თუ დავადებთ პირობას, რომ $u_{N+1}=u_N$. კონტინუალურ მიახლოებაში კი ეს უკანასკნელი პირობა შემდეგნაირად ჩაიწერება: $\partial u(n)/\partial n\big|_{n=N} = 0$. ახლა თუ ჩავთვლით, რომ პირველ ბურთულაზე რაიმე ჰარმონიული ძალა მოქმედებს, ესე იგი $F = \cos(\omega t)$, მაშინ პირველი ბურთულის რხევის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება (წინა შემთხვევისგან განსხვავებით, სადაც ნულოვანი ბურთულა მოცემული კანონით ირხეოდა, აქ ძალაა მოდებული):

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} = \left(u_2 - u_1 + F\right) + \left(u_2 - u_1\right)^3$$

ეს კი თავის მხრივ გამომდინარეობს (1)-დან, თუ გვაქვს პირობა $\left(u_1 - u_0\right) + \left(u_1 - u_0\right)^3 = F$ და კუბურ განტოლებას თუ ამოვხსნით, მივიღებთ საბოლოოდ პირობას $u_1 - u_0 = f$, სადაც f კუბური განტოლების ერთადერთი ფესვია. ესე იგი საბოლოოდ ორივე მხარეს ნოიმანის სასაზღვრო პირობას (Neumann boundary conditions) მივიღებთ კონტინუალურ მიახლოებაში:

$$\partial u(n)/\partial n\big|_{n=0} = f \qquad \partial u(n)/\partial n\big|_{n=N} = 0$$

2. პერიოდული სასაზღვრო პირობა:

ეს პირობა გამოიყენება, როდესაც შეკრული ჯაჭვი გვაქვს. ამ შემთხვევაში თვლიან, რომ $u_{N+1}=u_1$ და საზღვარზე (1) სისტემას შემდეგნაირად წერენ:

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} = \left(u_2 + u_N - 2u_1\right) + \left(u_2 - u_1\right)^3 + \left(u_N - u_1\right)^3 \qquad \frac{d^2u_N}{dt^2} = \left(u_1 + u_{N-1} - 2u_N\right) + \left(u_1 - u_N\right)^3 + \left(u_{N-1} - u_N\right)^3$$

ამოცანები

1. გააკეთეთ ფერმი-პასტა-ულამის ჯაჭვის დინამიკის მოდელირება, როცა სათავეში მოდებულია პერიოდული ძალა, ხოლო მეორე ბოლო თავისუფალია.

2. გააკეთეთ ფერმი-პასტა-ულამის ჯაჭვის დინამიკის მოდელირება, როცა გვაქვს პერიოდული სასაზღვრო პირობები და ყველა ოსცილატორზე ერთნაირი პერიოდული ძალა მოქმედებს.
3. გააკეთეთ ფერმი-პასტა-ულამის ჯაჭვის დინამიკის მოდელირება, როცა ლუწ ოსცილატორებს ორჯერ უფრო მეტი მასა აქვთ, ვიდრე კენტ ოსცილატორებს.
4. გააკეთეთ ფერმი-პასტა-ულამის ჯაჭვის დინამიკის მოდელირება, როცა ორივე ბოლო დაბმულია, ხოლო საწყისი დროის მომენტში პირველი მოდა არის აღგზნებული $u_n(0) = A\sin\left(\frac{\pi}{N+1}n\right)$, სადაც N ოსცილატორების რიცხვია.
5. გააკეთეთ ფერმი-პასტა-ულამის ჯაჭვის დინამიკის მოდელირება, როცა აღძრულია სასაზღვრო მოდა, ანუ როცა საწყის მომენტში ყველა ბურთულის სიჩქარე ნულია, ხოლო წანაცვლებებს აქვთ სახე: $u_n(0) = A(-1)^n$.