შუალედური გამოცდის ბილეთის პასუხის ნიმუში (შესწორებული!)

პრაქტიკული ამოცანები

1. რომელია მეტი და რამდენით: ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა 6 ქულა თუ ორჯერ გაგორებისას ჯამში მოვა 6 ქულა? **(2 ქულა)**

ამოხსნა. პირველ შემთხვევაში $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, ხდომილება მოვა 6 ქულა – $A = \{6\}$ და მისი ალბათობაა $P(A) = 1/6$. მეორე შემთხვევაში კი $\Omega = \{(1,1); (1,2); \dots; (6,6)\}$, $|\Omega| = 36$; ხდომილება ჯამში მოვა 6 ქულა – $B = \{(1,5); (5,1); (2,4); (4,2); (3,3)\}$ და მისი ალბათობა იქნება $P(B) = 5/36$. შესაბამისად, $P(A) = 1/6 = 6/36 > 5/36 = P(B)$ და $P(A) - P(B) = 1/36$.

2. კაზინოში დგას სამი სათამაშო მაგიდა A და B ტიპის, რომლებიც სრულიად ერთნაირად გამოიყურება. ამასთანავე, B ტიპის მაგიდა ორი ცალია. A ტიპის მაგიდაზე მოგების ალბათობა არის 1/3, ხოლო B ტიპის მაგიდაზე – 1/4. **ა)** იპოვეთ შემთხვევით არჩეულ მაგიდაზე მოგების ალბათობა. **(2 ქულა)**; **ბ)** თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და მოიგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A მაგიდა. **(2 ქულა)** **სულ 4 ქულა**

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A (შესაბამისად, B) **–** შემთხვევით შეირჩა A (შესაბამისად, B) მაგიდა და W – თქვენ მოიგეთ. პირობის თანახმად, ჩვენ გვაქვს: $P(A) = 1/3$, $P(B) = 2/3$, $P(W|A) = 1/3$და $P(W|B) = 1/4$. გამოსათვლელია ალბათობები: **ა)** $P(W)$და **ბ)** $P(A|W)$. სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად

$$\boldsymbol{P(W) = P(A)P(W|A) + P(B)P(W|B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{18}}.$$

ბაიესის ფორმულის თანახმად კი გვაქვს:

$$\boldsymbol{P(A|W) = \frac{P(A)P(W|A)}{P(W)} = \frac{1/9}{5/18} = \frac{2}{5}}.$$

3. მოცემულია დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

ξ	-2	-1	0	3	5
P	0.2	0.15	0.21	0.14	0.3

იპოვეთ: **ა)** განაწილების ფუნქცია; **ბ)** მათემატიკური ლოდინი; **გ)** დისპერსია; **დ)** მედიანა; **ე)** მოდა; **ვ)** 0.33-კვანტილი; **ზ)** ზედა 0.39 კრიტიკული წერტილი; **თ)** ასიმეტრიის კოეფიციენტი; **ი)** ექსცესის კოეფიციენტი; **კ)** $\max(3\xi, 4)$-ის განაწილების კანონი; **ლ)** $\boldsymbol{E}\{\max(3\xi, 4)\}$; **მ)** $P\{\xi \in (-1,3]\}$.

ან განაწილების ფუნქციით განაწილების კანონის პოვნა და დანარჩენი იგივე!

ან ორი დამოუკიდებელი ξ და η შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონების მიხედვით $h(\xi, \eta)$-ს განაწილების კანონის პოვნა და დანარჩენი იგივე!

ამოხსნა. ა)

$$\boldsymbol{F_\xi(x) = \sum_{x_k \le x} p_k = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ 0.2, & -2 \le x < -1; \\ 0.35, & -1 \le x < 0; \\ 0.56, & 0 \le x < 3; \\ 0.7, & 3 \le x < 5; \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}}$$

ბ) $\boldsymbol{E\xi = -2 \cdot 0.2 + (-1) \cdot 0.15 + \dots + 5 \cdot 0.3}$;

გ) $\boldsymbol{D\xi = (-2)^2 \cdot 0.2 + (-1)^2 \cdot 0.15 + \dots + 5^2 \cdot 0.3 - (E\xi)^2}$;

დ) მარცხნიდან დავიწყოთ და მოვძებნოთ პირველი მნიშვნელობა, რომლის ჩათვლით შესაბამისი ალბათობების ჯამი მეტი ან ტოლი იქნება 0.5-ის, გვექნება: $M_e = 0$;

ე) მნიშვნელობა, რომლის შესაბამისი ალბათობა უდიდესია, გვაქვს: $M_o = 5$;

ვ) მარცხნიდან დავიწყოთ და მოვძებნოთ პირველი მნიშვნელობა, რომლის ჩათვლით შესაბამისი ალბათობების ჯამი მეტი ან ტოლი იქნება 0.33-ის, გვექნება: $x_{0.33} = -1$;

ზ) მარჯვნიდან დავიწყოთ და მოვძებნოთ პირველი მნიშვნელობა, რომლის ჩათვლით შესაბამისი ალბათობების ჯამი მეტი ან ტოლი იქნება 0.39-ის, გვექნება: $x^{0.39} = 3$;

თ) $a = \frac{(-2-E\xi)^3 \cdot 0.2 + (-1-E\xi)^3 \cdot 0.15 + \cdots + (5-E\xi)^3 \cdot 0.3}{\{\sqrt{D\xi}\}^3}$;

ი) $e = \frac{(-2-E\xi)^4 \cdot 0.2 + (-1-E\xi)^4 \cdot 0.15 + \cdots + (5-E\xi)^4 \cdot 0.3}{\{\sqrt{D\xi}\}^4} - 3$;

კ)

$max(3\xi, 4)$	4	4	4	9	15
P	0.2	0.15	0.21	0.14	0.3

გავაერთიანოთ ტოლი მნიშვნელობები. საბოლოოდ გვაქვს:

$max(3\xi, 4)$	4	9	15
P	0.56	0.14	0.3

ლ) $E\{max(3\xi, 4)\} = 4 \cdot 0.56 + 9 \cdot 0.14 + 15 \cdot 0.3$;

მ) $P\{\xi \in (-1, 3]\} = 0.21 + 0.14 = 0.35$.

3′. მოცემულია უწყვეტი ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ c\sin 2x, & 0 \le x < \pi/6; \\ 1, & x \ge \pi/6. \end{cases}$$

იპოვეთ: **ა)** c კოეფიციენტი; **ბ)** მედიანა; **გ)** 0.2-კვანტილი; **დ)** ზედა 0.4 კრიტიკული წერტილი; **ე)** $P\{\xi \in [-1, \pi/8)\}$; **ვ)** $P\{|\xi| < \pi/12\}$; **ზ)** განაწილების სიმკვრივე; **თ)** მოდა. **სულ 4 ქულა**

ამოხსნა. **ა)** ამოვხსნათ განტოლება $F_\xi(\pi/6) = 1$ (ეს არის $F_\xi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა $\pi/6$ წერტილში). აქედან გვაქვს:

$$c\sin\frac{\pi}{3} = 1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}c = 1, \text{ საიდანაც } c = 2/\sqrt{3};$$

ბ) ამოვხსნათ განტოლება $F_\xi(x) = 0.5$. გვაქვს:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2x = 0.5, \quad \sin 2x = 0.25\sqrt{3}, \text{ საიდანაც } M_e = \frac{1}{2}\arcsin(0.25\sqrt{3});$$

გ) ამოვხსნათ განტოლება $F_\xi(x) = 0.2$. გვაქვს:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2x = 0.2, \quad \sin 2x = 0.1\sqrt{3}, \text{ საიდანაც } x_{0.2} = \frac{1}{2}\arcsin(0.1\sqrt{3});$$

დ) ამოვხსნათ განტოლება $F_\xi(x) = 1 - 0.4$. გვაქვს:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2x = 0.6, \quad \sin 2x = 0.3\sqrt{3}, \text{ საიდანაც } x^{0.4} = \frac{1}{2}\arcsin(0.3\sqrt{3});$$

ე) $P\left\{\xi \in \left[-1, \frac{\pi}{8}\right)\right\} = F_\xi\left(\frac{\pi}{8}\right) - F_\xi(-1) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2/3}$;

ვ) $P\left\{|\xi| < \frac{\pi}{12}\right\} = F_\xi\left(\frac{\pi}{12}\right) - F_\xi\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{6} - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

ზ) $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{4\cos 2x}{\sqrt{3}}, & 0 \le x < \pi/6; \\ 0, & x \ge \pi/6. \end{cases}$

თ) ვინაიდან $\boldsymbol{\max_x f_\xi(x) = \frac{4\cos(0)}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}}$, ამიტომ $\boldsymbol{M_o = 0}$.

4. მოცემულია ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი:

$\eta \setminus \xi$	-2	1	3
-3	0.15	?	0.1
5	0.2	0.1	0.05

ა) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი. **(3 ქულა); ბ)** შეადგინეთ $\max(2\xi,\eta)$-ს განაწილების კანონი. **(1 ქულა); გ)** გამოთვალეთ ξ -ს პირობითი განაწილების კანონი პირობაში, რომ $\eta = -3$. **(1 ქულა).** **სულ 5 ქულა**

ამოხსნა. ა) პუნქტი შესრულებულად ჩაითვლება, თუ შეასრულებთ შემდეგ ნაბიჯებს:

$$? = 1 - (0.15 + 0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.05) = 0.4;$$

ξ	-2	1	3
P	0.35	0.5	0.15

η	-3	5
P	0.65	0.35

$$\boldsymbol{E\xi = -2\cdot 0.35 + 1\cdot 0.5 + 3\cdot 0.15; E\eta = (-3)\cdot 0.65 + 5\cdot 0.35;}$$

$$\boldsymbol{D\xi = (-2)^2\cdot 0.35 + 1^2\cdot 0.5 + 3^2\cdot 0.15 - (E\xi)^2;\ \ D\eta = (-3)^2\cdot 0.65 + 5^2\cdot 0.35 - (E\eta)^2;}$$

$$\boldsymbol{E(\xi\eta) = (-2)\cdot(-3)\cdot 0.15 + 1\cdot(-3)\cdot 0.4 + \cdots + 3\cdot 5\cdot 0.05;}$$

$$\boldsymbol{\rho(\xi,\eta) = \frac{E(\xi\eta) - (E\xi)\cdot(E\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}.}$$

ბ) პუნქტი შესრულებულად ჩაითვლება, თუ დაწერთ:

$\boldsymbol{max(2\xi,\eta)}$	$\boldsymbol{max(2\cdot(-2),-3)}$	$\boldsymbol{max(2\cdot 1,-3)}$	$\cdots$	$\boldsymbol{max(2\cdot 3,5)}$
$\boldsymbol{max(2\xi,\eta)}$	-3	2	$\cdots$	6
$\boldsymbol{P}$	0.15	0.4	$\cdots$	0.05

გ) პუნქტი შესრულებულად ჩაითვლება, თუ დაწერთ:

$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{3}$
$\boldsymbol{P(\xi \mid \eta = -3)}$	0.15/0.65	0.4/0.65	$\boldsymbol{0.1/0.65}$

შენიშვნა: არ მოითხოვება არცერთი სიდიდის ბოლომდე გამოთვლა (საჭირო ფორმულებში შეიტანეთ საჭირო რიცხვები).

თეორიული საკითხები
(თითოეული თეორიული კითხვა ფასდება 1 ქულით, სულ 15 ქულა)

1. n ელემენტიანი სიმრავლის დალაგებულ m $(m \le n)$ ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა ტოლია

2. ალბათობა იმისა, რომ ბრტყელი B ფიგურიდან შემთხვევით შერჩეული წერტილი აღმოჩნდება მის $A \subset B$ ნაწილში ტოლია

3. ნებისმიერი ორი A და B ხდომილების სხვაობის ალბათობა ტოლია

4. დამოუკიდებელ A და B ხდომილებათა გაერთიანების ალბათობა ტოლია

5. თუ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ხდომილებათა სრული სისტემაა, მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად ნებისმიერი B ხდომილების ალბათობა ტოლია

6. n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილების k-ჯერ მოხდენის ალბათობა ტოლია

7\. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის p-კვანტილი ეწოდება ისეთ x მნიშვნელობას, რომლისთვისაც
8\. თუ დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია $p_k = P\{\xi = x_k\}$, მაშინ $P\{\xi \in \langle a, b\rangle\} =$
9\. დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის ($p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k = 1,2,\dots,n$) ასიმეტრიის კოეფიცენტი გამოითვლება
10\. პუასონის შემთხვევითი სიდიდე პარამეტრით λ ღებულობს k-ს ტოლ მნიშვნელობას ალბათობით
11\. $EHi(N, M, n) =$
12\. ექსპონენციალური განაწილების სიმკვრივე პარამეტრით λ მოიცემა თანაფარდობით $f_{Exp(\lambda)}(x) =$
13\. ნებისმიერი ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებისათვის $D(2\xi - 3\eta) =$
14\. შემთხვევითი სიდიდეს გააჩნია სტიუდენტის განაწილება თავისუფლების ხარისხით n თუ ის წარმოიდგინება როგორც
15\. თუ $\xi_i \cong N(a, \sigma^2), i = 1,2,\dots,n$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეებია. როგორაა განაწილებული მათი საშუალო არითმეტიკული, როცა σ^2 უცნობია

შენიშვნა: ცხრილში სწორი პასუხის გასწვრივ მარცხენა მხარეს ჩაწერეთ შესაბამისი კითხვის ნომერი.

№		№		№	
3	$P(A) - P(AB)$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/\sigma^2}$	15	$\frac{\bar{\xi} - a}{S'_n/\sqrt{n}} \cong t(n-1)$
12	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	9	$\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - E\xi)^3 p_k}{\left\{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - E\xi)^2 p_k}\right\}^3}$		$\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - E\xi)^4 p_k}{\left\{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - E\xi)^2 p_k}\right\}^4} - 3$
	$\sum_{k=1}^{n} h(x_k) p_k$	8	$\sum_{x_k \in \langle a,b\rangle} p_k$		$n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$
11	nM/N	14	$N(0,1)/\sqrt{\chi^2(n)/n}$, სადაც $\chi^2(n)$ და $N(0,1)$ დამოუკიდებელია		$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, სადაც $\xi_i \cong N(0,1), i = 1,2,\dots,n$ დამოუკიდებლებია
	$\frac{\bar{\xi} - a}{\sigma/\sqrt{n}} \cong N(0,1)$	5	$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)$	10	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0,1,2,\dots$
	$P(A \mid B) = P(A)/P(AB)$		$F_\xi(x) = 1 - p$	4	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
	$F_\xi(b) - F_\xi(a)$		$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	13	$4D\xi - 12cov(\xi, \eta) + 9D\eta$
7	$F_\xi(x) = p$		$4D\xi + 9D\eta$		$P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)$
	$1/\lambda^2$		$P(A) - P(B)$		$S(B)/S(A)$
	$np(1-p)$		N!		$P\{\xi \leq x\} \geq p$, $P\{\xi \geq x\} \geq 1 - p$
2	$S(A)/S(B)$		$n!/m!\,(n-m)!$		$m!/n!$
1	$n!/(n-m)!$		$2D\xi - 3D\eta$	6	$C_n^k\{P(A)\}^k\{1 - P(A)\}^{n-k}$

შენიშვნა: თქვენთვის საინტერესო ყველა ინფორმაცია და მასალა იხილეთ საიტზე: http://e-learning.tsu.ge → სასწავლო კურსების ჩამონათვალი → მათემატიკა → ელექტრონული ბიბლიოთეკა → ეკონომისტებისათვის (2013)! → ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის (2013) → · · ·