შუალედური გამოცდის ბილეთის პასუხის ნიმუში (2018)

პრაქტიკული ამოცანები

1. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 3 მწვანე კალკულატორი. ჩანთიდან დაბრუნების გარეშე (**ან დაბრუნებით**) იღებენ 2 კალკულატორს. ააგეთ მათში მწვანე კალკულატორთა რიცხვის განაწილების კანონი. **(2 ქულა)**

ამოხსნა. ამოღებულ 2 კალკულატორში შესაძლებელია იყოს 0, 1 ან 2 მწვანე კალკულატორი. ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად საძიებელი განაწილების კანონი იქნება

ξ	0	1	2
P	$\frac{C_6^2}{C_9^2}$	$\frac{C_6^1 \cdot C_3^1}{C_9^2}$	$\frac{C_3^2}{C_9^2}$

(**დაბრუნებით** ამოღების შემთხვევაში განაწილების კანონი იქნება:

ξ	0	1	2
P	$\frac{6 \cdot 6}{9 \cdot 9}$	$\frac{2 \cdot 6 \cdot 3}{9 \cdot 9}$	$\frac{3 \cdot 3}{9 \cdot 9}$

2. კაზინოში დგას სამი სათამაშო მაგიდა A და B ტიპის, რომლებიც სრულიად ერთნაირად გამოიყურება. ამასთანავე, B ტიპის მაგიდა ორი ცალია. A ტიპის მაგიდაზე მოგების ალბათობა არის 1/3, ხოლო B ტიპის მაგიდაზე – 1/4. **ა)** იპოვეთ შემთხვევით არჩეულ მაგიდაზე მოგების ალბათობა. **(2 ქულა)**; **ბ)** თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და მოიგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A მაგიდა. **(2 ქულა)** **სულ 4 ქულა**

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A (შესაბამისად, B) $-$ შემთხვევით შეირჩა A (შესაბამისად, B) მაგიდა და $W -$ თქვენ მოიგეთ. პირობის თანახმად, ჩვენ გვაქვს: $P(A) = 1/3, P(B) = 2/3$, $P(W|A) = 1/3$და $P(W|B) = 1/4$. გამოსათვლელია ალბათობები: **ა)** $P(W)$და **ბ)** $P(A|W)$. სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად

$$\boldsymbol{P(W) = P(A)P(W|A) + P(B)P(W|B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{18}}.$$

ბაიესის ფორმულის თანახმად კი გვაქვს:

$$\boldsymbol{P(A|W) = \frac{P(A)P(W|A)}{P(W)} = \frac{1/9}{5/18} = \frac{2}{5}}.$$

3. მოცემულია დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

$\boldsymbol{\xi}$	**-2**	**-1**	**0**	**3**	**5**
$\boldsymbol{P}$	**0.2**	**0.15**	**0.21**	**0.14**	**0.3**

იპოვეთ: **ა)** განაწილების ფუნქცია; **ბ)** მათემატიკური ლოდინი; **გ)** დისპერსია; **დ)** მედიანა; **ე)** მოდა; **ვ)** 0.33-კვანტილი; **ზ)** ზედა 0.39 კრიტიკული წერტილი; **თ)** ასიმეტრიის კოეფიციენტი; **ი)** ექსცესის კოეფიციენტი; **კ)** $\max(3\xi, 4)$-ის განაწილების კანონი; **ლ)** $\boldsymbol{E}\{\max(3\xi, 4)\}$; **მ)** $P\{\xi \in (-1,3]\}$.

ან განაწილების ფუნქციით განაწილების კანონის პოვნა და დანარჩენი იგივე!

ან ორი დამოუკიდებელი $\boldsymbol{\xi}$ და $\boldsymbol{\eta}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონების მიხედვით $\boldsymbol{h(\xi, \eta)}$-ს განაწილების კანონის პოვნა და დანარჩენი იგივე!

ამოხსნა. ა)

$$F_\xi(x)=\sum_{x_k\le x}p_k=\begin{cases}0, & x<-2;\\ 0.2, & -2\le x<-1;\\ 0.35, & -1\le x<0;\\ 0.56, & 0\le x<3;\\ 0.7, & 3\le x<5;\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$

ბ) $E\xi=-2\cdot 0.2+(-1)\cdot 0.15+\dots+5\cdot 0.3$;

გ) $D\xi=(-2)^2\cdot 0.2+(-1)^2\cdot 0.15+\dots+5^2\cdot 0.3-(E\xi)^2$;

დ) მარცხნიდან დავიწყოთ და მოვძებნოთ პირველი მნიშვნელობა, რომლის ჩათვლით შესაბამისი ალბათობების ჯამი მეტი ან ტოლი იქნება 0.5-ის, გვექნება: $M_e=0$;

ე) მნიშვნელობა, რომლის შესაბამისი ალბათობა უდიდესია, გვაქვს: $M_o=5$;

ვ) მარცხნიდან დავიწყოთ და მოვძებნოთ პირველი მნიშვნელობა, რომლის ჩათვლით შესაბამისი ალბათობების ჯამი მეტი ან ტოლი იქნება 0.33-ის, გვექნება: $x_{0.33}=-1$;

ზ) მარჯვნიდან დავიწყოთ და მოვძებნოთ პირველი მნიშვნელობა, რომლის ჩათვლით შესაბამისი ალბათობების ჯამი მეტი ან ტოლი იქნება 0.39-ის, გვექნება: $x^{0.39}=3$;

თ) $a=\frac{(-2-E\xi)^3\cdot 0.2+(-1-E\xi)^3\cdot 0.15+\dots+(5-E\xi)^3\cdot 0.3}{\{\sqrt{D\xi}\}^3}$;

ი) $e=\frac{(-2-E\xi)^4\cdot 0.2+(-1-E\xi)^4\cdot 0.15+\dots+(5-E\xi)^4\cdot 0.3}{\{\sqrt{D\xi}\}^4}-3$;

კ)

$max(3\xi,4)$	4	4	4	9	15
P	0.2	0.15	0.21	0.14	0.3

გავაერთიანოთ ტოლი მნიშვნელობები. საბოლოოდ გვაქვს:

$max(3\xi,4)$	4	9	15
P	0.56	0.14	0.3

ლ) $E\{max(3\xi,4)\}=4\cdot 0.56+9\cdot 0.14+15\cdot 0.3$;

მ) $P\{\xi\in(-1,3]\}=0.21+0.14=0.35$.

3′. მოცემულია უწყვეტი ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ c\sin 2x, & 0\le x<\pi/6;\\ 1, & x\ge\pi/6.\end{cases}$$

იპოვეთ: **ა)** c კოეფიციენტი; **ბ)** მედიანა; **გ)** 0.2-კვანტილი; **დ)** ზედა 0.4 კრიტიკული წერტილი; **ე)** $P\{\xi\in[-1,\pi/8)\}$; **ვ)** $P\{|\xi|<\pi/12\}$; **ზ)** განაწილების სიმკვრივე; **თ)** მოდა. **სულ 4 ქულა**

ამოხსნა. ა) ამოვხსნათ განტოლება $F_\xi(\pi/6)=1$ (ეს არის $F_\xi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა $\pi/6$ წერტილში). აქედან გვაქვს:

$$c\sin\frac{\pi}{3}=1,\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}c=1,\ \text{საიდანაც}\ c=2/\sqrt{3};$$

ბ) ამოვხსნათ განტოლება $F_\xi(x)=0.5$. გვაქვს:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2x=0.5,\qquad \sin 2x=0.25\sqrt{3},\ \text{საიდანაც}\ M_e=\frac{1}{2}\arcsin(0.25\sqrt{3});$$

გ) ამოვხსნათ განტოლება $F_\xi(x)=0.2$. გვაქვს:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2x=0.2,\qquad \sin 2x=0.1\sqrt{3},\ \text{საიდანაც}\ x_{0.2}=\frac{1}{2}\arcsin(0.1\sqrt{3});$$

დ) ამოვხსნათ განტოლება $F_\xi(x)=1-0.4$. გვაქვს:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{sin2x = 0.6}, \qquad \boldsymbol{sin2x = 0.3\sqrt{3}},$$ საიდანაც $\boldsymbol{x^{0.4} = \frac{1}{2}arcsin(0.3\sqrt{3})}$;

ე) $\boldsymbol{P\left\{\xi \in \left[-1,\frac{\pi}{8}\right)\right\} = F_\xi\left(\frac{\pi}{8}\right) - F_\xi(-1) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2/3}}$;

ვ) $\boldsymbol{P\left\{|\xi| < \frac{\pi}{12}\right\} = F_\xi\left(\frac{\pi}{12}\right) - F_\xi\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{6} - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}}$;

ზ) $$\boldsymbol{f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{4cos2x}{\sqrt{3}}, & 0 \le x < \pi/6; \\ 0, & x \ge \pi/6. \end{cases}}$$

თ) ვინაიდან $\boldsymbol{\max_x f_\xi(x) = \frac{4cos0}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}}$, ამიტომ $\boldsymbol{M_o = 0}$.

4. მოცემულია ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი:

$\eta \setminus \xi$	-2	1	3
-3	0.15	?	0.1
5	0.2	0.1	0.05

ა) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი. **(3 ქულა); ბ)** შეადგინეთ max($2\xi,\eta$)-ს განაწილების კანონი. **(1 ქულა); გ)** გამოთვალეთ ξ -ს პირობითი განაწილების კანონი პირობაში, რომ $\eta = -3$. **(1 ქულა).** **სულ 5 ქულა**

ამოხსნა. ა) პუნქტი შესრულებულად ჩაითვლება, თუ შეასრულებთ შემდეგ ნაბიჯებს:

? = 1 – (0.15 + 0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.05) = 0.4;

ξ	-2	1	3
P	0.35	0.5	0.15

η	-3	5
P	0.65	0.35

$$\boldsymbol{E\xi = -2\cdot 0.35 + 1\cdot 0.5 + 3\cdot 0.15; E\eta = (-3)\cdot 0.65 + 5\cdot 0.35;}$$
$$\boldsymbol{D\xi = (-2)^2\cdot 0.35 + 1^2\cdot 0.5 + 3^2\cdot 0.15 - (E\xi)^2;\ \ D\eta = (-3)^2\cdot 0.65 + 5^2\cdot 0.35 - (E\eta)^2;}$$
$$\boldsymbol{E(\xi\eta) = (-2)\cdot(-3)\cdot 0.15 + 1\cdot(-3)\cdot 0.4 + \cdots + 3\cdot 5\cdot 0.05;}$$
$$\boldsymbol{\rho(\xi,\eta) = \frac{E(\xi\eta) - (E\xi)\cdot(E\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}.}$$

ბ) პუნქტი შესრულებულად ჩაითვლება, თუ დაწერთ:

$\boldsymbol{max(2\xi,\eta)}$	$\boldsymbol{max(2\cdot(-2),-3)}$	$\boldsymbol{max(2\cdot 1,-3)}$	$\cdots$	$\boldsymbol{max(2\cdot 3,5)}$
$\boldsymbol{max(2\xi,\eta)}$	-3	2	$\cdots$	6
$\boldsymbol{P}$	0.15	0.4	$\cdots$	0.05

გ) პუნქტი შესრულებულად ჩაითვლება, თუ დაწერთ:

$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{3}$
$\boldsymbol{P(\xi\|\eta = -3)}$	0.15/0.65	0.4/0.65	$\boldsymbol{0.1/0.65}$

შენიშვნა: არ მოითხოვება არცერთი სიდიდის ბოლომდე გამოთვლა (საჭირო ფორმულებში შეიტანეთ საჭირო რიცხვები).

თეორიული კითხვები

1. ნამრავლის პრინციპი (ფორმულირება – 1 ქულა, შემოწმება ობიექტთა წყვილისათვის – 1 ქულა). **სულ 2 ქულა**

პასუხი. თუ პირველი ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია *n* სხვადასხვა გზით და თითოეული ამ შესაძლებლობისათვის მეორე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია *m* სხვადასხვა გზით, მაშინ ობიექტთა წყვილის შერჩევა შესაძლებელია *nm* სხვადასხვა გზით.

პირველი ტიპის ობიექტები იყოს $a_1,a_2,...,a_n$, მეორე ტიპის კი $b_1,b_2,...,b_m$. ამოვწეროთ ყველა წყვილი, სადაც პირველი წევრია a_1, შემდეგ ყველა წყვილი სადაც პირველი წევრია a_2, და ა. შ. ყველა წყვილი სადაც პირველი წევრია a_n:

$$\begin{array}{c} (a_1,b_1),\ (a_1,b_2),\ \ldots,\ (a_1,b_m) \\ (a_2,b_1),\ (a_2,b_2),\ \ldots,\ (a_2,b_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_n,b_1),\ (a_n,b_2),\ \ldots,\ (a_n,b_m) \end{array}$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ მატრიცის ფორმის გამოსახულება, სადაც m სტრიქონია და n სვეტი. შესაბამისად ასეთი წყვილების რაოდენობაა mn.

2. ხდომილებათა დამოუკიდებლობის ორი განმარტება (ერთი განმარტება – 1 ქულა, ეკვივალენტურობის შემოწმება – 2 ქულა). **სულ 4 ქულა**

პასუხი. A და B ხდომილებას ეწოდება დამოუკიდებელი თუ:

I) $P(A\,|\,B)=P(A)$; **II)** $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

ა) ვთქვათ, $P(A\,|\,B)=P(A)$. მაშინ პირობითი ალბათობის განმარტების თანახმად გვაქვს $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$, საიდანაც გვაქვს: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

ბ) ვთქვათ, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. მაშინ პირობითი ალბათობის განმარტება გვაძლევს: $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$.

3. $[a,b]$ სეგმენტზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის **ა)** განაწილების ფუნქციაა – 1 ქულა; **ბ)** მათემატიკური ლოდინია – 1 ქულა; **გ)** α-კვანტილია (ფორმულა – 1 ქულა, შემოწმება – 2 ქულა). **სულ 5 ქულა**

პასუხი. ა) თუ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია მოიცემა ფორმულით

$$F_{U([a,b])}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

სადაც a და b $(a<b)$ ნებისმიერ რიცხვებია, მაშინ ამ შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება თანაბარი კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე $[a,b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება სიმბოლოთი $U([a,b])$.

ბ), გ) $U([a,b])$-ს რიცხვითი მახასიათებლებია:

$$EU([a,b])=\frac{a+b}{2},\ \ x_\alpha=a+\alpha(b-a).$$

გამოვთვალოთ α-კვანტილი. ამოვხსნათ განტოლება $\dfrac{x-a}{b-a}=\alpha$, $x-a=\alpha(b-a)$, $x=a+\alpha(b-a)$.

4. ორგანზომილებიანი განაწილების კანონიდან მარგინალური განაწილების კანონის მიღება (ფორმულირება – 1 ქულა, შემოწმება – 2 ქულა). **სულ 3 ქულა**

პასუხი. თუ მოცემულია **ორგანზომილებიანი განაწილების კანონი**

$$p_{i,\,j}=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\},$$

მაშინ მარგინალური განაწილების კანონი, მაგალითად ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის იქნება: $p_i = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = \sum_j p_{i,j}$;

მართლაც, დემორგანის კანონისა და ჯამის ალბათობის ფორმულის ძალით ვღებულობთ:

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = P\{(\xi = x_i) \cap [\bigcup_j (\eta = y_j)]\} = P\{\bigcup_j [(\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)]\} =$$

$$= \sum_j P\{(\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)\} = \sum_j p_{i,j} \ .$$

5. დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არით-მეტიკულის განაწილების კანონი, როცა დისპერსია ცნობილია. **2 ქულა**

პასუხი. თუ $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული $N(a, \sigma^2)$ შემთხ-ვევითი სიდიდეებია, მაშინ $\dfrac{\bar{\xi} - a}{\sigma / \sqrt{n}} \cong N(0,1)$, სადაც $\bar{\xi} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ და $N(0,1)$ სტანდარტული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა.