ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ალექსანდრე აპლაკოვი, უშანგი გოგინავა, შალვა ზვიადაძე,
ბეჟან ღვაბერიძე

# კალკულუსი ტურიზმისთვის
# (სალექციო კურსი)

თბილისი 2020

# სარჩევი

# ლექცია 1

# სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

ამ ლექციაში გავეცნობით სიმრავლის ცნებას, შემოვიღებთ აუცილებელ განსაზღვრებებს და განვიხილავთ ძირითად სიმრავლურ ოპერაციებს.

## 1.1 სიმრავლის ცნება.

სიმრავლე მათემატიკის ერთ–ერთი ძირითადი ცნებაა. ამ ცნების მნიშვნელობას ხაზს უსვამს მათემატიკის, როგორც მეცნიერების, ერთ–ერთი განსაზღვრება: მათემატიკა არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის გარკვეულ სტრუქტურებს სიმრავლეებზე.

**სიმრავლე არის გარკვეულ ობიექტთა ერთობლიობა, კლასი.**

სიმრავლე და ობიექტთა ერთობლიობა სინონიმებია. ობიექტებს, რომლებისგანაც შედგება მოცემული სიმრავლე, სიმრავლის ელემენტები ეწოდება. ჩვეულებრივ, სიმრავლეები ლათინური ანბანის დიდი ასოებით აღინიშნება: $A, B, C, D, ...$, ხოლო სიმრავლის ელემენტები– ლათინური ანბანის პატარა ასოებით: $a, b, c, d, ...$. თუ $a$ ობიექტი $A$ სიმრავლის ელემენტია, მაშინ ჩავწერთ $a \in A$ და უკანასკნელ ჩანაწერს ასე წავიკითხავთ: "$a$ ელემენტი ეკუთვნის $A$ სიმრავლეს". ჩანაწერი $a \notin A$ ან $a \overline{\in} A$ ნიშნავს, რომ $a$ ელემენტი არ ეკუთვნის $A$ სიმრავლეს, ანუ $A$ სიმრავლის ელემენტთა შორის არ არის $a$.

> როდესაც სიმრავლეზე ვსაუბრობთ, ვგულისხმობთ, რომ ყოველი ობიექტის მიმართ ჭეშმარიტია ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი ორი შესაძლებლობიდან: ობიექტი ეკუთვნის მოცემულ სიმრავლეს, როგორც მისი ელემენტი ან არა.

**მაგალითი 1.1** *ვთქვათ,* $\mathbb{N}$ *არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, მაშინ განსაზღვრების ძალით* $5 \in \mathbb{N}$*, ხოლო* $2/3 \notin \mathbb{N}$.

სიმრავლე შედგება მხოლოდ ერთმანეთისაგან განსხვავებული ობიექტებისაგან. თუ $A$ სიმრავლის ელემენტებია $a, b, c, d, ...$, მაშინ $A$ სიმრავლე შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად $A = \{a, b, c, d, ...\}$. მაგალითად, თუ $2, 4, 5, 9$ არის $A$ სიმრავლის ელემენტები და ის სხვა ელემენტს არ შეიცავს, მაშინ შეგვიძლია, ჩავწეროთ $A = \{2, 4, 5, 9\}$. შევნიშნოთ, რომ ჩაწერა $\{2, 4, 5, 2, 9\}$ არ არის კორექტული, რადგანაც 2, როგორც ობიექტი, შესაბამის ჩანაწერში უნდა მონაწილეობდეს მხოლოდ ერთხელ. ჩანაწერი: $\{2, 5, \{5\}\}$,

ცხადია სიმრავლეს წარმოადგენს, რომელიც შეიცავს სამ ელემენტს (შევნიშნოთ, რომ $\{5\}$ და 5 განხილული სიმრავლის სხვადასხვა ელემენტებია).

ხშირად გამოვიყენებთ სიმრავლის მოცემის ასეთ წესს: დავასახელებთ რაიმე თვისებას, რომელსაც აკმაყოფილებს აღსაწერი ერთობლიობის ყველა ობიექტი და მხოლოდ ისინი.

ვთქვათ, $P$ არის თვისება, რომელიც გააჩნია გარკვეული ტიპის ობიექტებს, მაშინ ამ თვისების მქონე ყველა ობიექტთა $A$ სიმრავლე ასე ჩაიწერება: $A = \{x : x\text{–ს აქვს} P \text{თვისება}\}$.

**მაგალითი 1.2** *სიმრავლე $\{x : x > 0\}$ წარმოადგენს ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლეს.*

$N$,$Z$, $Q$, $I$ და $R$ სიმბოლოებით აღნიშნავენ, შესაბამისად, ნატურალურ, მთელ, რაციონალურ, ირაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეებს.

ვთქვათ, მოცემულია $A$ და $B$ სიმრავლე. $A$ სიმრავლეს ეწოდება $B$ სიმრავლის ნაწილი ანუ ქვესიმრავლე, თუ $A$ სიმრავლის ყოველი ელემენტი $B$ სიმრავლესაც ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში წერენ $A \subset B$. ეს უკანასკნელი იკითხება ასე: $A$ სიმრავლე $B$ სიმრავლის ქვესიმრავლეა. განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდიმნარეობს, რომ ყოველი $B$ სიმრავლისთვის სამართლიანია ჩართვა $B \subset B$.

მათემატიკაში ასევე შემოტანილია ე.წ. ცარიელი სიმრავლის ცნებაც.

**ცარიელი სიმრავლე** ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს. ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. მიღებულია, რომ ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი $A$ სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

მომავალში, გარკვეული ობიექტების ჩამოთვლისას, ნაცვლად მძიმეებისა, შეიძლება ზოგჯერ წერტილ-მძიმეებიც გამოვიყენოთ.

**მაგალითი 1.3** *განვიხილოთ სიმრავლე $A = \{a, b, c\}$. სიმრავლეები $\varnothing$, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ არიან $A$ სიმრავლის ქვესიმრავლეები, მაგრამ არ არან მისი ელემენტები.*

ვთქვათ, $A$ და $B$ ისეთი სიმრავლეებია, რომ $A \subset B$ და $B \subset A$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $A$ და $B$ ტოლი სიმრავლეებია და ვწერთ $A = B$.

**მაგალითი 1.4** *ვთქვათ, $A = \{1, 7, 8\}$ და $B = \{7, 1, 8\}$. ცხადია, რომ $A = B$.*

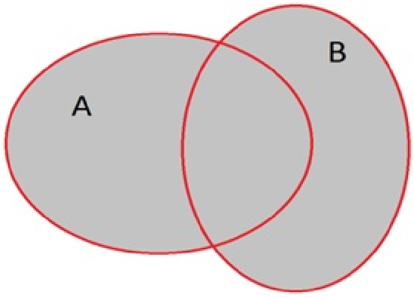
სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ მისი ელემენტების რაოდენობა არის რაიმე მთელი არაუარყოფითი რიცხვი. სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ ის სასრული არაა, ანუ შეიცავს ელემენტთა უსასრულო რაოდენობას.

ნატურალურ რიცხვთა $N$ სიმრავლე უსასრულო სიმრავლის ერთ–ერთი მაგალითია.

მომავალში, ჩანაწერების გამარტივების მიზნით, ზოგჯერ, ნაცვლად სიტყვებისა „ან“, „და“, „არსებობს“, „ნებისმიერი“ გამოვიყენებთ, შესაბამისად, სიმბოლოებს $\vee$, $\wedge$, $\exists$, $\forall$.

## 1.2 მოქმედებები სიმრავლეებზე

ვთქვათ, მოცემულია $A$ და $B$ სიმრავლე. $A$ და $B$ სიმრავლეების გაერთიანება ეწოდება ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც $A$ და $B$ სიმრავლეებიდან ერთ–ერთს მაინც ეკუთვნის. $A$ და $B$ სიმრავლეების გაერთიანება აღინიშნება $A \cup B$ სიმბოლოთი. ამგვარად $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ (იხ. სურ 1.1).




სურ 1.1

**მაგალითი 1.5** *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 8\}$ *და* $B = \{7, 1, 10, 11\}$*. მაშინ*

$$A \cup B = \{1, 7, 8, 10, 11\}.$$

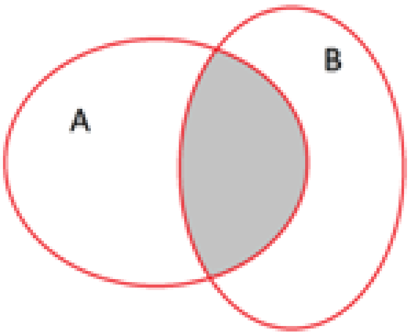
$A$ და $B$ სიმრავლეების თანაკვეთა ეწოდება ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნის $A$ და $B$ სიმრავლეებიდან თითოეულს. $A$ და $B$ სიმრავლეების თანაკვეთა აღინიშნება $A \cap B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ (იხ. სურ 1.2).

**მაგალითი 1.6** *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 8\}$ *და* $B = \{7, 1, 10, 11\}$*. მაშინ*

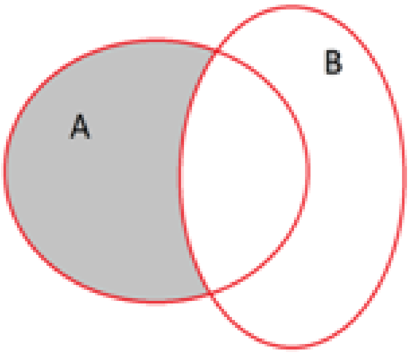
$$A \cap B = \{1, 7\}.$$

ცხადია, რომ თუ $A \subset B$, მაშინ $A \cup B = B$ და $A \cap B = A$.

$A$ და $B$ სიმრავლეთა სხვაობა ეწოდება $A$ სიმრავლის ყველა იმ ელემენტისაგან შედგენილ სიმრავლეს, რომლებიც $B$ სიმრავლეს არ ეკუთვნის. $A$ და $B$ სიმრავლეთა სხვაობა აღინიშნება $A \backslash B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ (იხ. სურ 1.3).




სურ 1.2




სურ 1.3

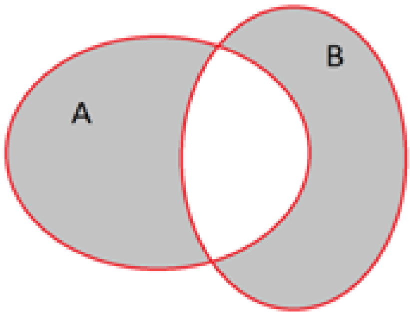
ბრტყელი ფიგურების საშუალებით სიმრავლეების გამოსახვის ასეთ დიაგრამებს **ვენის დიაგრამებს** უწოდებენ.

**მაგალითი 1.7** *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 8\}$ *და* $B = \{7, 1, 10, 11\}$. *მაშინ* $A \backslash B = \{8\}$.

**მაგალითი 1.8** *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 9\}$ *და* $B = \{1, 7, 10, 11\}$. *ცხადია, რომ* $A \backslash B = \{9\}$, *მაგრამ* $(A \backslash B) \cup B = \{1, 7, 9, 10, 11\} \neq A$

სიმრავლეების გაერთიანება და თანაკვეთა შეიძლება განისაზღვროს არა მარტო ორი, არამედ–რამდენიმე სიმრავლისთვისაც.

$A$ და $B$ სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა ეწოდება $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ სიმრავლეს. $A$ და $B$ სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა აღინიშნება სიმბოლოთი $A \triangle B$ (იხ. სურ 1.4).




სურ 1.4

$n(S)$–ით აღვნიშნოთ სასრული $S$ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა. სამართლიანია ფორმულა:

$$n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T).$$

ვთქვათ, $M$ რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა და $A \subset M$. $C_M A$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $M \backslash A$ სიმრავლეს და ვუწოდებთ $A$ სიმრავლის დამატებას $M$ სიმრავლემდე.

**თეორემა 1.1 (დე მორგანის კანონები)** *ვთქვათ, $A \subset M$ და $B \subset M$. სამართლიანია ტოლობები:*

$$\begin{aligned} C_M(A \cup B) &= C_M A \cap C_M B, \\ C_M(A \cap B) &= C_M A \cup C_M B. \end{aligned}$$

**სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი.** ვთქვათ, $a$ და $b$ რაიმე ობიექტებია. $(a, b)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ დალაგებული წყვილი, რომლის პირველი ელემენტია $a$, ხოლო მეორე - $b$. ვიტყვით, რომ ორი $(a, b)$ და $(c, d)$ დალაგებული წყვილი ტოლია, თუ $a = c$ და $b = d$.

შევნიშოთ, რომ $(a, b)$ და $\{a, b\}$ სხვადასხვა ობიექტებია: $(a, b)$ დალაგებული წყვილია, ხოლო $\{a, b\}$ - ორელემენტიანი სიმრავლე. დასაშვებია $(a, a)$ წყვილი, ხოლო $\{a, a\}$ სიმბოლოს აზრი არ აქვს.

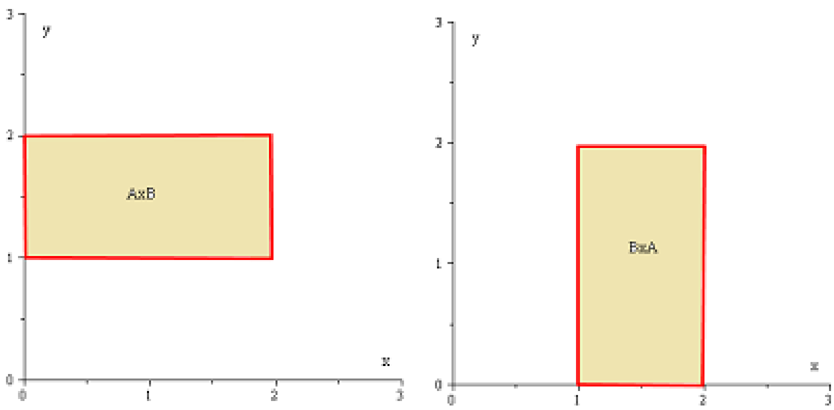
ვთქვათ, მოცემულია $A$ და $B$ სიმრავლე. ყველა დალაგებული $(a, b)$ წყვილის სიმრავლეს, სადაც $a \in A$ და $b \in B$, $A$ და $B$ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება $A \times B$ სიმბოლოთი.

ამგვარად, $A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A, \ b \in B\}$. თუ $A = B$, მაშინ $A \times A$ დეკარტულ ნამრავლს ვუწოდებთ $A$ სიმრავლის **დეკარტულ კვადრატს** და მას $A^2$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

**მაგალითი 1.9** *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 9\}$ *და* $B = \{1, 7, 10, 11\}$*. მაშინ*

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,1),(1,7),(1,10),(1,11),(7,1),(7,7), \\ &\quad (7,10),(7,11),(9,1),(9,7),(9,10),(9,11)\}. \end{aligned}$$

**მაგალითი 1.10** *ვთქვათ,* $A = [0;2]$ , $B = [1;2]$*. რადგან რიცხვთა ყოველ დალაგებულ* $(a,b)$ *წყვილს სიბრტყეზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი, რომლის პირველი კოორდინატია* $a$ *, ხოლო მეორე -* $b$ *, ამიტომ ამ სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლს შეგვიძლია მოვუძებნოთ მარტივი ინტერპრეტაცია საკოორდინატო სიბრტყეზე. როგორც სურ. 1.5-ზე ჩანს, საზოგადოდ,* $A \times B \neq B \times A$*.*




სურ 1.5

შევნიშნოთ, რომ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის განსაზღვრების ძალით, თუ მოცემული სიმრავლეებიდან ერთი მაინც ცარიელია, მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი ცარიელი სიმრავლეა.

## 1.3 სავარჯიშოები:

1. ვთქვათ $A = \{1\}$ და $B = \{1, 2\}$. ჭეშმარიტია თუ მცდარი:

   ა) $A \subset B$; ბ) $1 \in A$; გ) $2 \in A$; დ) $2 \in B$; ე) $2 \subset B$; ვ) $A \in B$

2. შეადგინეთ $A = \{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლე.

3. ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ და $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. ჭეშმარიტია თუ მცდარი:

   ა) $A = B$; ბ) $A \subset B$; გ) $A \subset C$; დ) $A \in B$; ე) $A \in C$; ვ) $B \in D$

4. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \Delta B$, $A \times B$, თუ

ა) $A = \{1, 2, 5, 9\}$, $B = \{2, 9, 7, 5, 1, 6\}$;

ბ) $A = \{2n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2n + 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$;

გ) $A = (1; 6)$, $B = [1; 6]$;

დ) $A = (1; +\infty)$, $B = (-\infty; 6]$.

5. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{3, 7, 9\}$, $C = \{3, 8, 9\}$. იპოვეთ:

ა) $(A \cup B) \cap C$; ბ) $(A \backslash B) \times (B \backslash C)$; გ) $(A \cap B) \cup C$; დ) $(A \cup B) \times (B \backslash C)$.

6. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{3, 5, 8\}$, $B = \{8, 9, 11\}$, $C = \{8, 10\}$. იპოვეთ:

ა) $(A \cup B) \cup C$; ბ) $(A \backslash B) \cap (B \backslash C)$;
გ) $(A \cap B) \cap C$; დ) $(A \cup B) \cap (B \backslash C)$.

7. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{2, 4, 7\}$, $B = \{7, 8, 9\}$, $C = \{7, 9\}$. იპოვეთ:

ა) $(A \cap B) \cup C$; ბ) $(A \backslash B) \times (C \backslash B)$;
გ) $(A \cup B) \cap C$; დ) $(A \backslash B) \times (B \backslash C)$.

8. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{5, 7, 8\}$, $B = \{7, 13\}$, $C = \{7, 12, 13\}$. იპოვეთ:

ა) $(A \cap B) \cup C$; ბ) $(A \backslash B) \times (B \backslash C)$;
გ) $(A \cup B) \cap C$; დ) $(A \cap B) \times (B \cup C)$.

9. დაშტრიხეთ $A \times B$, თუ

ა) $A = [1; 3]$, $B = [-1; 4]$; ბ) $A = (2; 4)$, $B = (-2; 1)$;
გ) $A = [1; 4)$, $B = (2; 5]$; დ) $A = [0; 4]$, $B = (0; 2)$;
ე) $A = \{2\}$, $B = [3; 4]$; ვ) $A = (2; 4]$, $B = \{3\}$.

10. მიუთითეთ ცარიელი სიმრავლეები.

ა) ევროპის ქვეყნების სიმრავლე, რომელთა დასახელება იწყება "ი"ასოზე.
ბ) მარსზე მცხოვრები ადამიანების სიმრავლე.
გ) ერთზე ნაკლები ნატურალური რიცხვების სიმრავლე.
დ) საქართველოს ქალაქების სიმრავლე, რომელთა მოსახლეობა აღემატება 100000.

11. მიუთითეთ ცარიელი სიმრავლეები.

ა) საქართველოს ქალაქების სიმრავლე, რომელთა დასახელება იწყება "ს"ასოზე.
ბ) $x^2 + 10 = 0$ განტოლების ნამდვილ ამონახსნთა სიმრავლე.
გ) ლუწი მარტივი რიცხვების სიმრავლე.
დ) $5x^2 > -1$ უტოლობის ნამდვილ ამონახსნთა სიმრავლე.

12. მართებულია თუ არა ტოლობა $A = B$, თუ $A = \{0; -1; 3\}$ და $B = \{x \ : \ x(x^2 - 2x - 3) = 0\}$?

13. მართებულია თუ არა ტოლობა $A = B$, თუ $A = \{-3; -1; 4\}$ და $B = \{x \ : \ x(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 4x + 3) = 0\}$?

14. ტურისტულ სააგენტოს მიაკითხა 64-მა ადამიანმა, რომელთაგან 26-ს სურს სამოგზაუროდ წასვლა ავსტრიაში, 43-ს - ესპანეთში, ხოლო 13-ს - ორივე ქვეყანაში.

ა) რამდენ ადამიანს სურს სამოგზაუროდ წასვლა მხოლოდ ავსტრიაში?

ბ) რამდენ ადამიანს სურს მოგზაურობა მხოლოდ ესპანეთში?
გ) რამდენ ადამიანს სურს იმოგზაუროს ავსტრიაში ან ესპანეთში?
დ) რამდენ ადამიანს არ სურს იმოგზაუროს ავსტრიაში ან ესპანეთში?

15. გამოკითხული 92 სტუდენტიდან აღმოჩნდა, რომ 64 მათგანი სწავლობს ინგლისურ ენას, 45 - ფრანგულს, ხოლო 26 - ორივე უცხო ენას.
ა) რამდენი სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ ინგლისურს?
ბ) რამდენი სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ ფრანგულს?
გ) რამდენი სტუდენტი სწავლობს ინგლისურ ან ფრანგულ ენებს?
დ) რამდენი სტუდენტი არ სწავლობს არც ერთ უცხო ენას?

16. ჩაწერეთ რაიმე ისეთი $A$ და $B$ სიმრავლეები, რომელთათვისაც:
ა) $A \cap B = \{a; -1; 7\}$;
ბ) $A \cap B = \emptyset$;
გ) $A \cup B = \{4; 9; -3; b\}$;
დ) $A \cup B = \{5\}$;
ე) $A \backslash B = \{2; k\}$;
ვ) $A \backslash B = A$.

17. ვენის დიაგრამების გამოყენებით აჩვენეთ, თუ როდის არის სამართლიანი შემდეგი სიმრავლური ტოლობა $(A \backslash B) \cup B = A$.

18. ჩაწერეთ $A = \{a; b; 7\}$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლისაგან შედგენილი სიმრავლე.

19. ჩაწერეთ $B = \{5; \{c\}; \emptyset\}$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლისაგან შედგენილი სიმრავლე.

20. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{a; b\}$, $B = \{1; 2; 3\}$ და $C = \{2; 3; 7; 9\}$. ჩაწერეთ სიმრავლე $A \times (B \cap C)$.

21. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{-2; k\}$, $B = \{2; 5\}$ და $C = \{2; b\}$. ჩაწერეთ სიმრავლე $(B \cup C) \times A$

# ლექცია 2

# ნამდვილ რიცხვთა ღერძი, მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა

შემოვიღებთ ნამდვილ რიცხვთა ღერძს, განვიხილავთ ღერძზე სხვადასხვა სახის რიცხვით შუალედებს, გავეცნობით ნამდვილი რიცხვის მოდულის თვისებებს, შემოვიღებთ დეკარტის მართკუთხა საკოორდინატო სისტემას.

## 2.1 რიცხვითი ღერძი. რიცხვითი შუალედები. ნამდვილი რიცხვის მოდული და მისი თვისებები. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა

განვიხილოთ წრფე და მასზე მდებარე ორი $A$ და $B$ განსხვავებული წერტილი. ამ წრფეზე შეიძლება ავირჩიოთ მოძრაობის ორი მიმართულება: $A$-დან $B$-სკენ, ან $B$-დან $A$-სკენ. მათგან ერთ–ერთი, მაგალითად, $A$-დან $B$-სკენ, მივიღოთ დადებით მიმართულებად. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და აღებულ წრფის წერტილთა სიმრავლეს შორის შეიძლება, დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შემდეგი წესით: ნულს შევუსაბამოთ წრფის რომელიმე $O$ წერტილი, რომელსაც სათავე ვუწოდოთ. რაიმე მონაკვეთის სიგრძე მივიღოთ სიგრძის ერთეულად და ნამდვილი $\pm a(a > 0)$ რიცხვს შევუსაბამოთ წრფის წერტილი, რომელიც დაშორებულია $O$ სათავიდან $a$ მანძილით დადებითი მიმართულებით $+a$ რიცხვისათვის და უარყოფითი მიმართულებით $-a$ რიცხვისათვის. ცხადია, რომ ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა. ამ წესით მიღებულ წრფეს ვუწოდოთ რიცხვითი ღერძი ანუ საკოორდინატო ღერძი. საკოორდინატო ღერძის რაიმე წერტილის შესაბამის რიცხვს ამ წერტილის კოორდინატი ეწოდება.

მაშასადამე, წერტილის მდებარეობა ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განისაზღვრება ერთი კოორდინატით. შემდგომში ნამდვილ რიცხვსა და მის შესაბამის წერტილს ღერძზე გავაიგივებთ.

ვთქვათ: $a$ და $b$ ორი ნამდვილი რიცხვია და $a < b$.

**განსაზღვრება 2.1** *ყველა იმ ნამდვილ $x$ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას*

$$a \leq x \leq b,$$

*ჩაკეტილი შუალედი (მონაკვეთი) ეწოდება და* $[a;b]$ *სიმბოლოთი აღინიშნება, ანუ*

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

*ანალოგიურად,*

$$(a;b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

*სიმრავლეს ღია შუალედი (ინტერვალი) ეწოდება, ხოლო*

$$[a;b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

*სიმრავლეებს ნახევრად ღია შუალედები ეწოდებათ.*

**განსაზღვრება 2.2** *ყველა იმ ნამდვილ* $x$ *რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას* $x \geq a$*, უსასრულო შუალედი ეწოდება და* $[a;\infty)$ *სიმბოლოთი აღინიშნება, ანუ*

$$[a;\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.$$

უსასრულო შუალედებს წარმოადგენენ აგრეთვე შემდეგი სიმრავლეები:

$$(a;\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$(-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\},$$

$$(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

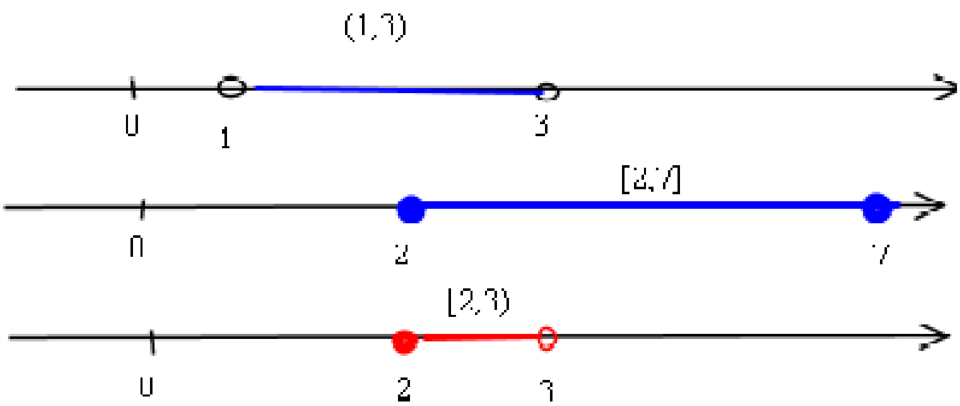
ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეც უსასრულო შუალედს წარმოადგენს და იგი ასე აღინიშნება

$$\mathbb{R} = (-\infty;\infty).$$

**მაგალითი 2.1** *რიცხვით ღერძზე დავშტრიხოთ* $(1;3)$ *და* $[2;7]$ *სიმრავლეების თანაკვეთა (იხილეთ სურათი 2.1)*

**განსაზღვრება 2.3** *ნამდვილი* $a$ *რიცხვის მოდული ეწოდება თვით ამ* $a$ *რიცხვს, თუ იგი არაუარყოფითია და მის მოპირდაპირე რიცხვს, თუ იგი უარყოფითია. რიცხვის მოდული* $|a|$ *სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{როცა } a \geq 0, \\ -a, & \text{როცა } a < 0. \end{cases}$$




სურ 2.1

ცხადია, რომ გეომეტრიულად ნამდვილი რიცხვის მოდული წარმოადგენს მანძილს რიცხვითი ღერძის სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე.

მაგალითად: $|5| = 5$, $|-2| = -(-2) = 2$. მოვიყვანოთ მოდულის ზოგიერთი თვისება:

**თვისება 2.1** *ა) ნებისმიერი $a$ ნამდვილი რიცხვის მოდული არაუარყოფითი სიდიდეა $|a| \geq 0$;*
*ბ) მოპირდაპირე რიცხვების მოდულები ტოლია $|a| = |-a|$.*

**თვისება 2.2** *ორი რიცხვის ჯამის მოდული არ აღემატება ამ რიცხვების მოდულების ჯამს*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

**თვისება 2.3** *თუ $a$ და $b$ ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ*

$$||a| - |b|| \leq |a - b|\,.$$

**თვისება 2.4** *ორი რიცხვის ნამრავლის მოდული უდრის ამ რიცხვების მოდულების ნამრავლს, ე. ი.*

$$|ab| = |a|\,|b|$$

.

**თვისება 2.5** *ორი რიცხვის შეფარდების მოდული ($b \neq 0$) უდრის ამ რიცხვების მოდულების შეფარდებას, ე. ი.*

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

**მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა საკოორდინატო ღერძზე**
ვთქვათ, $a$ და $b$ ორი ნამდვილი რიცხვია. მაშინ $a$ და $b$ წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

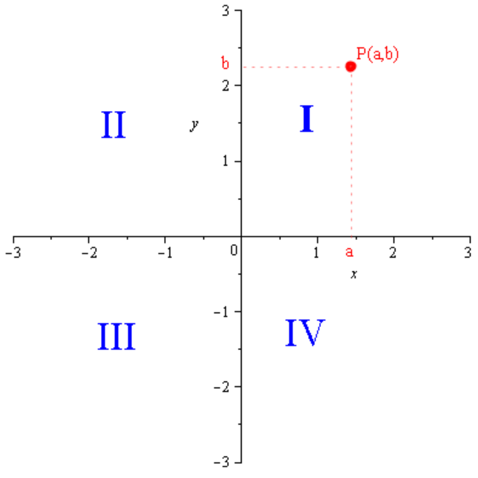
$$d(a,b) = |b-a|.$$

თვისება 2.1–ის ძალით მივიღებთ

$$|b-a| = |a-b|\,.$$

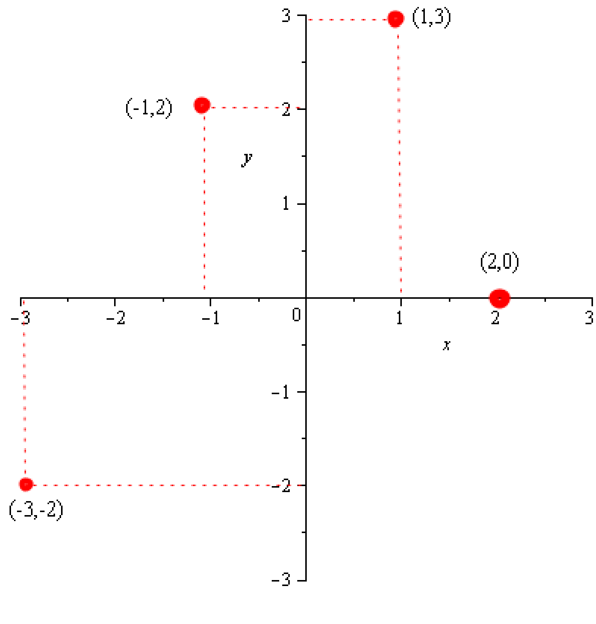
განვიხილოთ სიბრტყეზე ერთიდაიმავე მასშტაბის ორი ურთიერთმართობული და საერთო სათავის მქონე $OX$ და $OY$ საკოორდინატო ღერძი. $OX$ ღერძს ვუწოდოთ აბსცისათა ღერძი, ხოლო $OY$ ღერძს – ორდინატთა ღერძი. როგორც წესი,სიბრტყეზე აბსცისთა ღერძს იღებენ "ჰორიზონტალურად"და მასზე მოძრაობას ირჩევენ მარცხნიდან მარჯვნივ, ორდინატთა ღერძს კი იღებენ "ვერტიკალურად"და მასზე მიმართულებას ირჩევენ ქვემოდან ზემოთ. საკოორდინატო ღერძები სიბრტყეს ყოფს ოთხ ნაწილად, რომელთაც მეოთხედები ეწოდება და ინომრებიან ისე, როგორც სურ. 2.2-ზეა ნაჩვენები. საკოორდინატო ღერძთა ასეთ სისტემას მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ეწოდება, ხოლო ღერძების გადაკვეთის $O$ წერტილს კოორდინატთა სისტემის სათავე. შევნიშნოთ, რომ თავად საკოორდინატო ღერძების წერტილებს არ მივაკუთვნებთ არცერთ მეოთხედს.

სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი $P$ წერტილიდან $OX$ და $OY$ ღერძებისადმი გავავლოთ მართობები. $OX$ ღერძისადმი გავლებული მართობის ფუძის კოორდინატი აღვნიშნოთ $x$–ით, ხოლო $OY$ ღერძისადმი გავლებული მართობის ფუძის კოორდინატი კი– $y$–ით. ამგვარად, სიბრტყის ნებისმიერ $A$ წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა გარკვეული $(x,y)$ წყვილი. $x$-ს ეწოდება $A$ წერტილის აბსცისა, ხოლო $y$–ს ორდინატი, $x$-ს და $y$–ს ეწოდება $A$ წერტილის კოორდინატები და წერენ $A(x,y)$.




სურ 2.2

ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა $(x, y)$ წყვილი. აბსცისათა ღერძის $x$ წერტილსა და ორდინატთა ღერძის $y$ წერტილზე გავავლოთ შესაბამისად $OX$ და $OY$ ღერძების მართობული წრფეები. ცხადია, რომ მოცემული $(x, y)$ წყვილი შეესაბამება გავლებული პერპენდიკულარების გადაკვეთის $A$ წერტილს. ამ წესით ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ $(x, y)$ წყვილს შეესაბამება სიბრტყის ერთადერთი წერტილი, რომლის კოორდინატებია $x$ და $y$(იხ. სურ. 2.3).




სურ 2.3

**ამრიგად, სიბრტყის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვთა წყვილების სიმრავლეს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.**

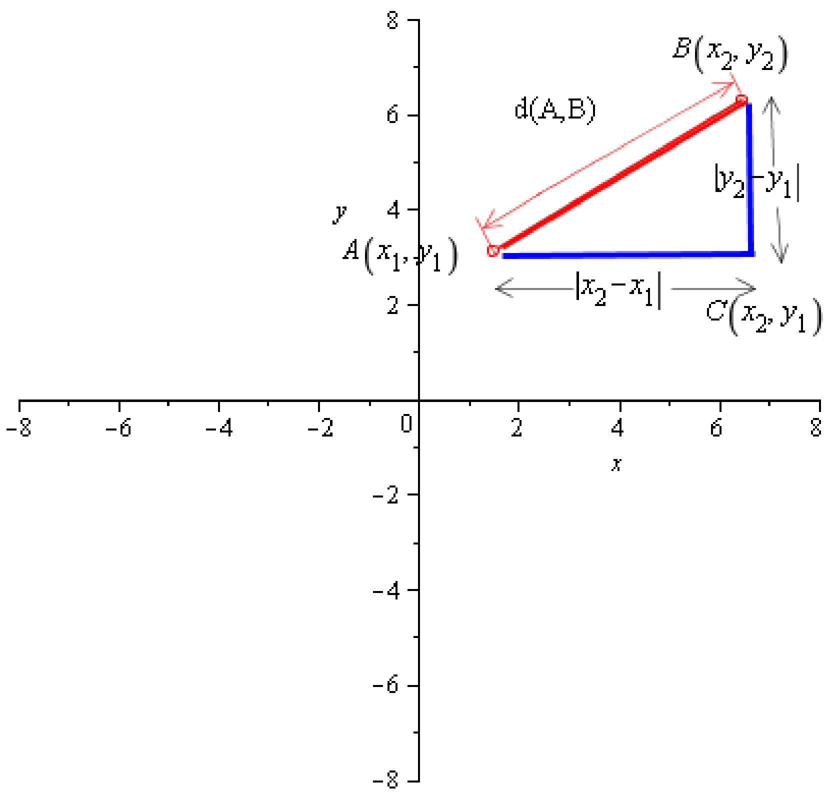
სიბრტყეს, რომლეზედაც არჩეულია კოორდინატთა სისტემა, საკოორდინატო სიბრტყე (ან დეკარტის საკოორდინატო სისტემა) ეწოდება და აღინიშნება $\mathbb{R}^2$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ, $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ სიბრტყის ნებისმიერი ორი წერტილია. მაშინ, როგორც სურათი 2.4–დან ჩანს

$$d(A, C) = |x_2 - x_1|$$

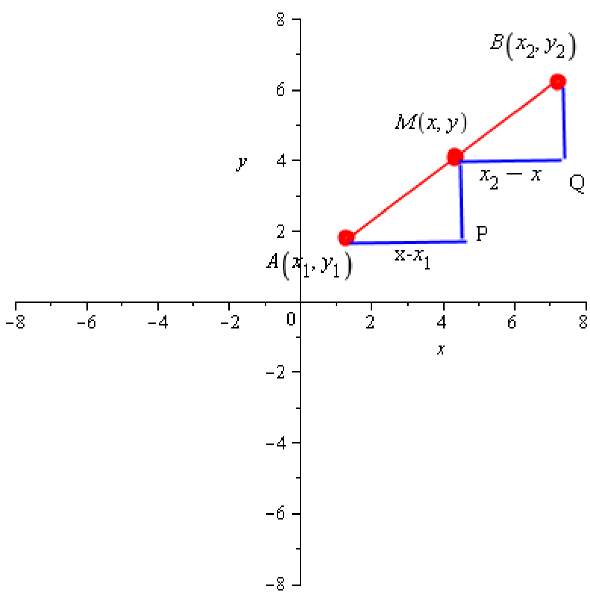
და
$$d(B,C) = |y_2 - y_1|.$$
რადგანაც სამკუთხედი $ACB$ მართკუთხაა, პითაგორას თეორემის ძალით მივიღებთ, რომ
$$d^2(A,B) = d^2(A,C) + d^2(B,C).$$
აქედან ვასკვნით, რომ

> საკოორდინატო სიბრტყეზე ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს სახე:
> $$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$




სურ 2.4

ვიპოვოთ სიბრტყეზე მოცემული $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის $M(x,y)$ შუაწერტილის კოორდინატები (იხ. სურათი 2.5). რადგანაც $d(A,P) = d(M,Q)$, მივიღებთ:
$$x - x_1 = x_2 - x$$
და
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$
ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$




სურ 2.5

ამრიგად, $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის $M(x, y)$ შუაწერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულით:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

**მაგალითი 2.2** *ვთქვათ, მოცემულია ოთხკუთხედი, რომლის წვეროების კოორდინატებია: $P(1, 2)$, $Q(4, 4)$, $R(5, 9)$ და $S(2, 7)$. დაამტკიცეთ, რომ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.*

***ამოხსნა:*** *როგორც ჩვენთვის ცნობილია, თუ ოთხკუთხედში დიაგონალები იკვეთება შუა წერტილში, მაშინ ასეთი ოთხკუთხედი წარმოადგენს პარალელოგრამს. შევამოწმოთ მოყვანილი თვისება. $PR$ დიაგონალის შუაწერტილის კოორდინატებია:*

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+9}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right).$$

*ანალოგიურად, $QS$ დიაგონალის შუაწერტილის კოორდინატებია*

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+11}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right).$$

*ვინაიდან, მოცემული ოთხკუთხედის დიაგონალები იკვეთება შუაწერტილში, ვასკვნით, რომ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.*

ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი განტოლება

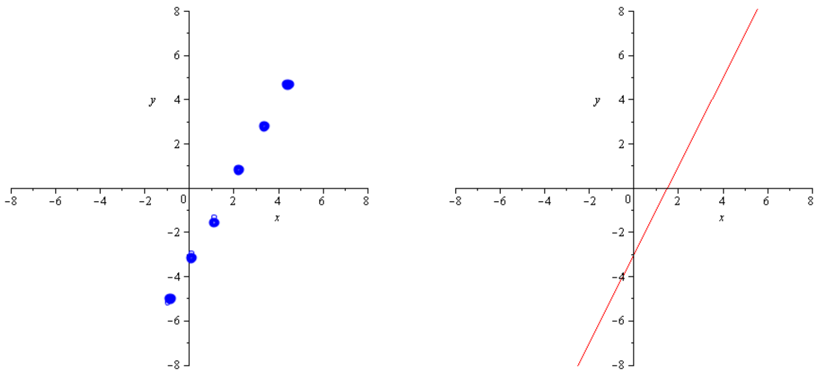
$$2x - y = 3. \tag{2.1}$$

სიბრტყეზე განვიხილოთ ყველა იმ $(x,y)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას. ამ სიმრავლეს ვუწოდებთ მოცემული განტოლების გრაფიკს.

**მაგალითი 2.3** *$x$–ს მივანიჭოთ გარკვეული მნიშვნელობები და გამოვთვალოთ $y$–ის შესაბამისი მნიშვნელობები:*

| $x$ | $y=2x-3$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| *-1* | *-5* | *(-1,-5)* |
| *0* | *-3* | *(0,-3)* |
| *1* | *-1* | *(1,-1)* |
| *2* | *1* | *(2,1)* |
| *3* | *3* | *(3,3)* |
| *4* | *5* | *(4,5)* |

*აღნიშნული წერტილები განლაგდება წრფეზე, რომლის გავლების შედეგად მივიღებთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკს. (იხ. სურათი 2.6).*



(a) (b)

სურ 2.6

**განსაზღვრება 2.4** *იმ წერტილის $x$ კოორდინატს, რომელშიც განტოლების გრაფიკი კვეთს $OX$ ღერძს, $x$–გადაკვეთა ეწოდება.*

*იმ წერტილის $y$ კოორდინატს, რომელშიც განტოლების გრაფიკი კვეთს $OY$ ღერძს, $y$–გადაკვეთა ეწოდება.*

$x$–გადაკვეთის საპოვნელად გრაფიკის შესაბამის განტოლებაში $y$-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ ნული. ხოლო $y$-გადაკვეთის საპოვნელად $x$-ის ნაცვლად ჩავსვათ ნული.

## 2.2 სავარჯიშოები:

1. რიცხვით ღერძზე დაშტრიხეთ მოცემული სიმრავლეების თანაკვეთა და გაერთიანება.

   ა) $[3;7]$ და $[2;5]$; ბ) $[-1;3]$ და $[0;2]$;
   გ) $[0;5]$ და $[5;9]$; ე) $[-3;6]$ და $[6;12]$;
   დ) $(-\infty;6]$ და $(6;9)$; ვ) $(-\infty;2)$, და $(1;\infty)$.

2. გადაწერეთ გამოსახულება მოდულის გარეშე:

   ა) $|20|$; ბ) $|-14|$;
   გ) $\left|\sqrt{3}-3\right|$; დ) $|10-\pi|$.

3. გადაწერეთ გამოსახულება მოდულის გარეშე:

   ა) $|\pi-3|$; ბ) $\left|1-\sqrt{2}\right|$;
   გ) $|a-b|, a<b$; დ) $a+b+|a-b|, a<b$.

4. გამოთვალეთ:

   ა)$||-6|-|-3||$; ბ) $\frac{-2}{|-3|}$;
   გ) $|2-|-15||$; დ) $-1-|1-|-1||$;
   ე) $\left|\frac{-5}{12}\right|$; ვ) $\left|\frac{7-12}{12-7}\right|$;
   ზ) $|(-2)\cdot 6|$; თ) $\left|\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot 15\right|$.

5. გამოთვალეთ მანძილი წერტილებს შორის:

   ა) $A(2)$ და $B(11)$; ბ) $A(–3)$ და $B(21)$;
   გ) $A\left(\frac{11}{3}\right)$ და $B\left(-\frac{3}{10}\right)$; დ) $A\left(\frac{7}{15}\right)$ და $B\left(\frac{-1}{21}\right)$;
   ე) $A(–38)$ და $B(–57)$; ვ) $A(–21)$ და $B(–18)$.

6. დაამტკიცეთ:

   ა) $\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$; ბ) $\min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}$.

7. დაამტკიცეთ სამკუთხედის უტოლობა:

$$|x+y|\leq|x|+|y|.$$

8. ამოხსენით განტოლებები:

   ა) $|x|=6$; ბ) $|x+2|=5$;
   გ) $|2x-3|=9$; დ) $|1-t|=1$.

9. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ შემდეგი წერტილები :

   $A(3,-2), B(-1,0), C(-5,2), D(-1,-3), E(0,2)$.

10. ვთქვათ, $M(6,8)$ წერტილი არის არის $AB$ მონაკვეთის შუაწერტილი. იპოვეთ $B$ წერტილის კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ $A$ წერტილის კოორდინატებია $(2,3)$ .

11. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები. იპოვეთ მანძილი მოცემულ წერტილებს შორის და ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები:

    ა) $(0,8),(6,16)$; ბ) $(-2,5),(10,0)$;
    გ) $(3,-2),(-4,5)$; დ) $(-1,1),(-6,-3)$;
    ე) $(6,-2),(-6,2)$; ვ) $(0,-8),(5,0)$.

12. დახაზეთ ოთკუთხედი წვეროებით: $A(1,3)$, $B(5,3)$, $C(1,-3)$ და $D(5,-3)$. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი.

13. დახაზეთ პარალელოგრამი წვეროებით: $A(1,2)$, $B(5,2)$, $C(3,6)$ და $D(7,6)$. იპოვეთ მიღებული პარალელოგრამის ფართობი.

14. წერტილები $A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(4,3)$ და $D(2,3)$ მონიშნეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. დახაზეთ მონაკვეთები $AB$, $BC$, $CD$ და $DA$. რა სახის ოთხკუთხედია $ABCD$ ? იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი.

15. სიბრტყეზე მონიშნეთ წერტილები $P(5,1)$, $Q(0,6)$ და $R(-5,1)$. იპოვეთ იმ $S$ წერტილის კოორდინატები, რომლისთვისაც ოთკუთხედი $PQRS$ იქნება კვადრატი.

16. $A(6,7)$ და $B(-5,8)$ წერტილებიდან რომელი უფრო ახლოსაა საკოორდინატო სისტემის სათავესთან?

17. $A(-6,3)$ და $B(3,0)$ წერტილებიდან რომელი უფრო ახლოსაა $C(-2,1)$ წერტილთან?

18. აჩვენეთ, რომ წერტილები $(a,b)$ და $(b,a)$ თანაბრადაა დაშორებული კოორდინატთა სისტემის სათავიდან.

19. აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი წვეროებით $A(0,2)$, $B(-3,-1)$ და $C(-4,3)$ ტოლფერდაა.

20. პითაგორას შებრუნებული თეორემის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი წვეროებით $A(6,-7)$, $B(11,-3)$ და $C(2,-2)$ მართკუთხაა.

21. მოცემულია სამკუთხედი წვეროებით $A(1,0)$, $B(3,6)$ და $C(8,2)$. იპოვეთ $ABC$ სამკუთხედის მედიანათა სიგრძეები.

22. ააგეთ შემდეგი წერტილები: $P(-1,-4)$, $Q(1,1)$ და $R(4,2)$. იპოვეთ იმ $S$ წერტილის კოორდინატები, რომლისთვისაც ფიგურა $PQRS$ იქნება პარალელოგრამი.

23. ააგეთ პარალელოგრამი წვეროებით: $A(-2,-1)$, $B(4,2)$, $C(7,7)$ და $D(1,4)$. იპოვეთ მისი დიაგონალების შუაწერტილების კოორდინატები.

24. დაადგინეთ, მოცემული წერტილები ეკუთვნიან თუ არა მოცემული განტოლების გრაფიკს?

    ა) $x-2y-1=0; (0,0), (1,0), (-1,1)$;
    ბ) $y(x^2+1)=1; (1,1), (1,\frac{1}{2}), (-1,\frac{1}{2})$;
    გ) $x^2+xy+y^2=4, (0,-2), (1,-2), (2,-2)$;
    დ) $x^2+y^2=1, (0,1), (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

25. იპოვეთ $OX$ და $OY$ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები:

    ა) $y=2x-6$; ბ) $y=x^2-5$;
    გ) $4x^2+25y^2=100$; დ) $x^2-xy+3y=1$;
    ე) $9x^2-4y^2=36$; ვ) $y-2xy+4x=1$.

26. იპოვეთ $OX$ ღერძის მიმართ $A(2,-3)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი და გამოთვალეთ მანძილი ამ სიმეტრიული წერტილიდან $B(5,6)$ წერტილამდე.

27. იპოვეთ $OY$ ღერძის მიმართ $A(3, -6)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი და გამოთვალეთ მანძილი ამ სიმეტრიული წერტილიდან $B(5, 7)$ წერტილამდე.

28. იპოვეთ საკოორდინატო სისტემის სათავის მიმართ $A(1, -4)$ წერტილის სომეტრიული წერტილი და გამოთვალეთ მანძილი ამ სიმეტრიული წერტილიდან კოორდინატთა სისტემოს სათავემდე.

# ლექცია 3

# წრფე სიბრტყეზე. წრფის განტოლებათა სახეები

ამ ლექციაში შემოვიღებთ წრფის დახრის კოეფიციენტის ცნებას; განვიხილავთ სიბრტყეზე მოცემული წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებებს და ძირითად ამოცანებს წრფეების შესახებ.

## 3.1 წრფის დახრის კოეფიციენტი. წრფის განტოლებათა სახეები

ვთქვათ, საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული ერთი წერტილი მოძრაობს იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული მეორე წერტილისკენ. წერტილის კოორდინატების ცვლილებას ვუწოდებთ კოორდინატთა ნაზრდებს. ისინი გამოითვლებიან შემდეგი წესით: ბოლო წერტილის პირველ კოორდინატს ვაკლებთ საწყისი წერტილის პირველ კოორდინატს და აღვნიშნავთ $\Delta x$ სიმბოლოთი. ანალოგიურად, ბოლო წერტილის მეორე კოორდინატს ვაკლებთ საწყისი წერტილის მეორე კოორდინატს და სხვაობას აღვნიშნავთ $\Delta y$ სიმბოლოთი. მაშასადამე (იხ. სურათი 3.1)

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

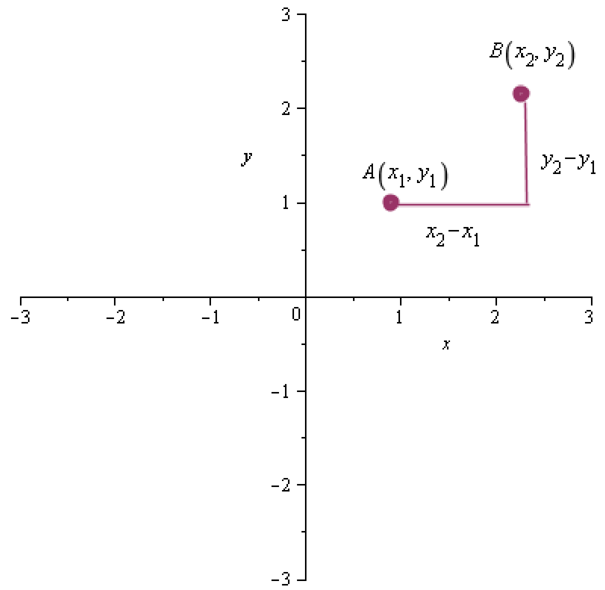
და

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

**მაგალითი 3.1** *ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს $A\,(3,-3)$ წერტილიდან $B\,(-1,2)$ წერტილისკენ. იპოვეთ კოორდინატთა ნაზრდები:*

***ამოხსნა:***

$$\Delta x = -1 - 3 = -4, \quad \Delta y = 2 - (-3) = 5.$$




სურ 3.1

**წრფის დახრის კოეფიციენტი**
ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია $l$ წრფე და $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ მასზე დაფიქსირებული ნებისმიერი ორი წერტილია. წრფის დახრის კოეფიციენტი, ანუ საკუთხო კოეფიციენტი $m$ განისაზღვრება ფორმულით (იხ. სურ. 3.1)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

ადვილი დასანახია, რომ თუ წრფეზე დავაფიქსირებთ ნებისმიერ სხვა ორ $A'(x_1', y_1')$ და $B'(x_2', y_2')$ წერტილს, მაშინ მოცემული წრფის დახრის კოეფიციენტი არ შეიცვლება(იხ. სურ. 3.2), ე. ი.

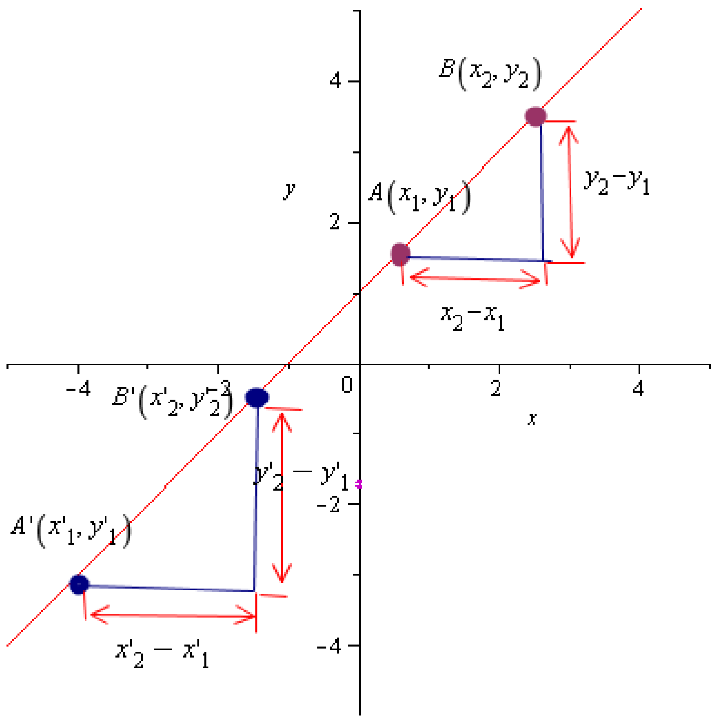
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

წრფის დახრის კოეფიციენტი შეიძლება იყოს დადებითი, უარყოფითი ან ნულის ტოლი. წრფის ყოფაქცევა საკოორდინატო სიბრტყეზე დამოკიდებულია საკუთხო კოეფიციენტის ნიშანზე. 3.3 სურათზე მოცემულია დახრის კოეფიციენტის დამოკიდებულება წრფის ყოფაქცევაზე.

**მაგალითი 3.2** *ვიპოვოთ იმ წრფის დახრის კოეფიციენტი, რომელიც გადის $P(2, 1)$ და $Q(8, 5)$ წერტილებზე.*

***ამოხსნა:***

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$




სურ 3.2

**ვთქვათ, ცნობილია, რომ წრფის დახრის კოეფიციენტი არის $m$ და წრფე გადის სიბრტყის $(x_1, y_1)$ წერტილზე. დავწეროთ ამ წრფის განტოლება.**
ავიღოთ საკოორდინატო სიბრტყის ნებისმიერი ის $(x, y)$ წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემული წრფის განტოლებას (იხ. სურათი 3.4). მაშინ, დახრის კოეფიციენტის განსაზღვრების ძალით

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

საიდანაც მივიღებთ საძიებელ განტოლებას

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)\,.$$

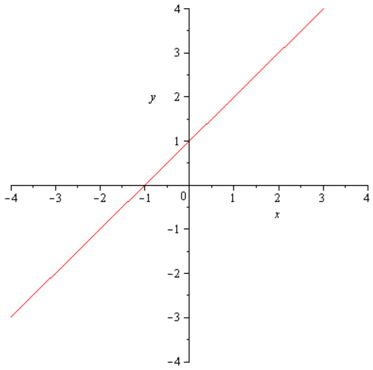
ანალოგიური მსჯელობით მარტივად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ მოცემულ ორ $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

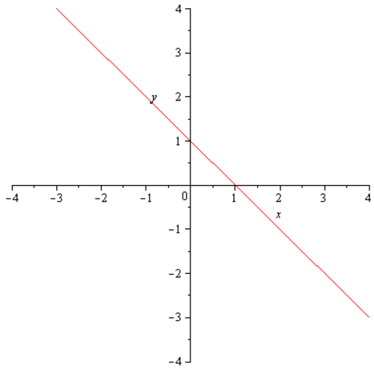
**მაგალითი 3.3** *დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომლის დახრის კოეფიციენტია $-\frac{1}{2}$ და გადის $(1, -3)$ წერტილზე.*
***ამოხსნა:***

$$y + 3 = -\frac{1}{2}\,(x - 1)\,,$$

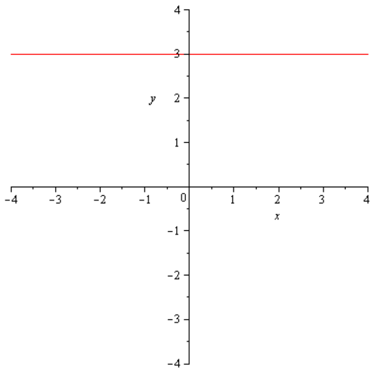
$$x + 2y + 5 = 0.$$



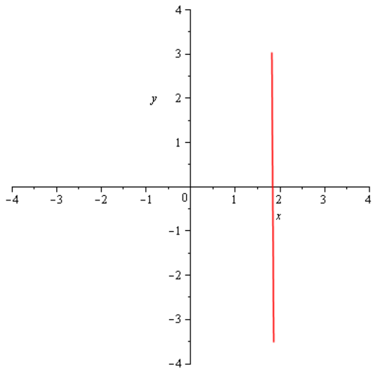
(a) დახრის კოეფიციენტი დადებითია



(b) დახრის კოეფიციენტი უარყოფითია



(c) დახრის კოეფიციენტი არის ნულის ტოლი, $Y_1 = Y_2$



(d) დახრის კოეფიციენტი არ არის განსაზღვრული, $x_1 = x_2$

სურ 3.3

დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომლის დახრის კოეფიციენტია $m$, ხოლო $y$ –გადაკვეთა $b$. ცხადია, უნდა დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის სიბრტყის $(0, b)$ წერტილზე და დახრის კოეფიციენტია $m$ (იხ. სურათი 3.5). როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში წრფის განტოლებას ექნება სახე:

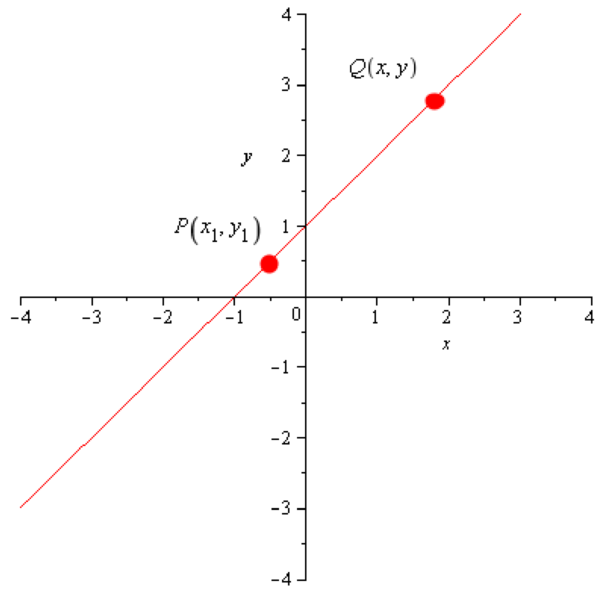
$$y - b = m(x - 0),$$

ანუ

$$y = mx + b.$$

დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომლის დახრის კოეფიციენტია $m$, ხოლო $x$ –გადაკვეთა $a$. ცხადია, უნდა დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის სიბრტყის $(a, 0)$ წერტილზე და დახრის კოეფიციენტია $m$ (იხ. სურათი 3.6). მაშინ როგორც ვიცით, წრფის განტოლებას ექნება სახე:

$$y = m(x - a),$$




სურ 3.4

**დავწეროთ წრფის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ მისი $x$ –გადაკვეთაა $a$, ხოლო $y$ –გადაკვეთა $b$ (იხ. სურათი 3.7).**
ვინაიდან ეს წრფე გაივლის $(0, b)$ და $(a, 0)$ წერტილებზე, ამიტომ მისი დახრის კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$m = -\frac{b}{a}.$$

მაშასადამე, წრფის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$y - b = m(x - 0) = -\frac{b}{a}x,$$

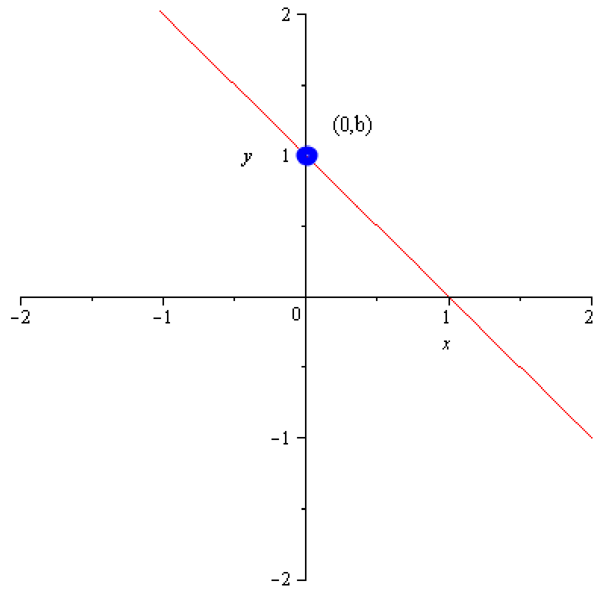
საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

მტკიცდება, რომ ყოველი წრფივი ორცვლადიანი $Ax + By + C = 0$ განტოლების გრაფიკი სიბრტყეზე წარმოადგენს წრფეს. ამ განტოლებას უწოდებენ წრფის ზოგად განტოლებას.
წრფის ზოგად განტოლებაში თუ $B \neq 0$, წრფის დახრის კოეფიციენტი გამოითვლება $m = -A/B$ ფორმულით.

მტკიცდება, რომ ორი წრფე პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი დახრის კოეფიციენტები ტოლია (იხ. სურათი 3.8).

**მაგალითი 3.4** *ვიპოვოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის სიბრტყის* $(5, 2)$ *წერტილზე და პარალელურია* $4x + 6y + 5 = 0$ *წრფის.*




სურ 3.5

***ამოხსნა:*** *პირველ რიგში ვიპოვოთ წრფის დახრის კოეფიციენტი.*

$$m = -\frac{2}{3}.$$

*აქედან კი, წრფეთა პარალელობის პირობის გამოყენებით მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას*

$$y = -\frac{2}{3}(x-5)+2.$$

ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფე $l_1$ და $l_2$, რომელთა დახრის კოეფიციენტებია, შესაბამისად, $m_1$ და $m_2$. მაშინ პირობა

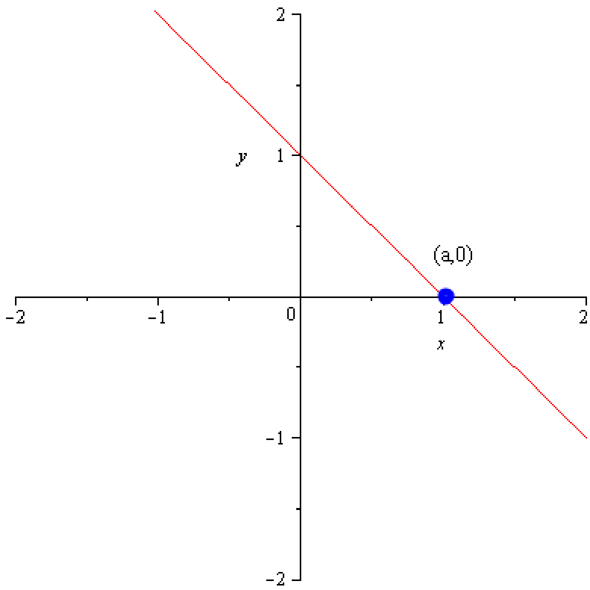
$$m_1 m_2 = -1$$

არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ მოცემული წრფეები იყვნენ ურთიერთმართობულები.

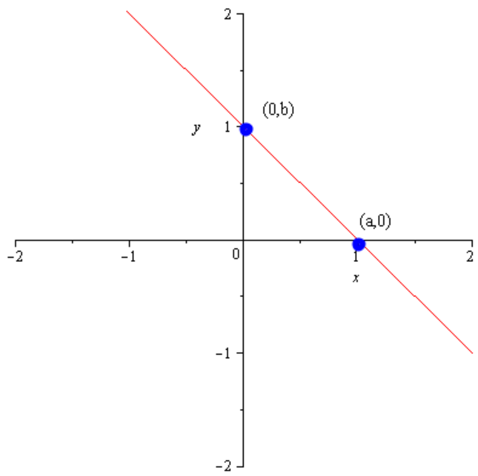
რადგანაც პარალელურ წრფეებს აქვთ ერთნაირი დახრის კოეფიციენტები, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ თითოეული ეს წრფე გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეში. ვთქვათ, $l_1$ წრფის განტოლება არის $y = m_1 x$, ხოლო $l_2$ წრფის – $y = m_2 x$ (იხ. სურათი 3.9).

მაშასადამე, 3.9 სურათზე აღნიშნული $A$ და $B$ წერტილების კოორდინატები იქნება $(1, m_1)$ და $(1, m_2)$ შესაბამისად. განვიხილოთ სამკუთხედი $AOB$. როგორც ცნობილია სასკოლო კურსიდან (პითაგორას და მისი შებრუნებული თეორემა), მოცემული სამკუთხედი რომ იყოს მართკუთხა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთი გვერდის კვადრატი უდრიდეს დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს. მაშასადამე,

$$[d(O,A)]^2 + [d(O,B)]^2 = [d(A,B)]^2$$




სურ 3.6



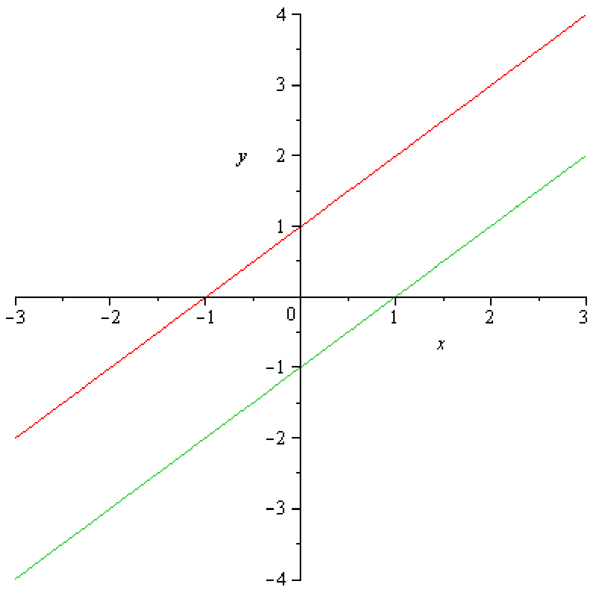

სურ 3.7

ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ,

$$\begin{aligned}
\left(1^2+m_1^2\right)+\left(1^2+m_2^2\right) &= (1-1)^2+(m_2-m_1)^2 \\
2+m_1^2+m_2^2 &= m_2^2-2m_1m_2+m_1^2, \\
2 &= -2m_1m_2, \\
m_1m_2 &= -1.
\end{aligned}$$

**მაგალითი 3.5** *დავამტკიცოთ, რომ სიბრტყის წერტილები* $P(3,3), Q(8,17)$ *და* $R(11,5)$ *წარმოადგენენ მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებს. მართლაც, გამოვთვალოთ* $PR$ *და* $QR$ *წრფეების დახრის კოეფიციენტები*

$$m_1=\frac{5-3}{11-3}=\frac{1}{4}$$




სურ 3.8

და

$$m_2 = \frac{5-17}{11-8} = -4.$$

რადგანაც $m_1 m_2 = -1$, დავასკვნით $PR$ და $QR$ წრფეების მართობულობას.

**მაგალითი 3.6** *ვიპოვოთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე და მართობულია $4x + 6y + 5 = 0$ წრფის.*

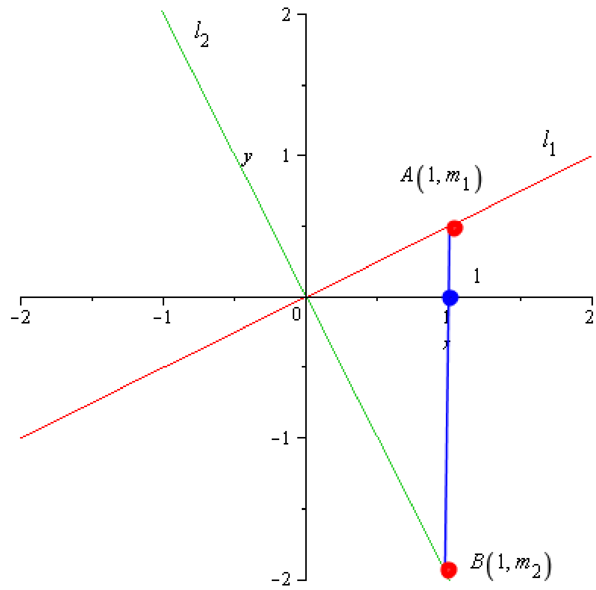
***ამოხსნა:*** *რადგანაც მოცემული წრფის საკუთხო კოეფიციენტია $m = -\frac{2}{3}$, მაშინ საძებნი წრფის დახრის კოეფიციენტი იქნება $\frac{3}{2}$ და მაშასადამე $(0,0)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას ექნება სახე:*

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0),$$

$$y = \frac{3}{2}x.$$

**მაგალითი 3.7** *ვიპოვოთ $y = 3x - 7$ და $5x - y + 1 = 0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.*

***ამოხსნა.*** *ცხადია, ეს წრფეები არ არიან პარალელური, ვინაიდან $m_1 = 3$ და $m_2 = 5$. მათი გადაკვეთის წერტილი ეკუთვნის ორივე წრფეს. ანუ, წერტილის კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილონ ორივე წრფის განტოლება. ასეთი $(x, y)$ წყვილის საპოვნელად კი, ცხადია, უნდა ამოვხსნათ ამ განტოლებებისაგან შედგენილი სისტემა. გვექნება*




სურ 3.9

$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ 5x - y + 1 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 5x - 3x + 7 + 1 = 0 \\ 2x = -8 \\ x = -4 \end{array} \right. \quad \Big| \; y = 3(-4) - 7 = -19$$

*მაშასადამე, მოცემული ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია* $(-4; -19)$.

## 3.2 სავარჯიშოები:

1. დაწერეთ იმ წრფის განტოლებები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ მოცემულ პირობებს:

   1) დახრის კოეფიციენტია 3 და $y$-გადაკვეთა $-2$;
   2) დახრის კოეფიციენტია $\frac{2}{3}$; $y-$გადაკვეთა $4$;
   3) გადის $(2, 3)$ წერტილზე; დახრის კოეფიციენტია $5$;
   4) გადის $(-2, 4)$ წერტილზე; დახრის კოეფიციენტია $-1$;
   5) გადის $(2, 1)$ და $(1, 6)$ წერტილებზე;
   6) გადის $(-2, 5)$ და $(-1, -3)$ წერტილებზე;
   7) x-გადაკვეთაა 1; y-გადაკვეთა 6;
   8) x-გადაკვეთა -8; y-გადაკვეთა 6;
   9) გადის $(-1, 4)$ წერტილზე; დახრის კოეფიციენტი არაა განსაზღრული;
   10) გადის $(2, -1)$ წერტილზე; დახრის კოეფიციენტი არაა განსაზღრული;
   11) გადის $(5, 1)$ წერტილზე დახრის კოეფიციენტია $0$;
   12) გადის $(1, 2)$ წერტილზე და პარალელურია $y = 3x - 5$ წრფის;
   13) გადის $(4, 5)$ წერტილზე და პარალელურია $y$-ღერძის;
   14) გადის $(2, 6)$ წერტილზე და პარალელურია $y = 1$ წრფის
   15) გადის $(-1, -2)$ წერტილზე და მართობულია $2x + 5y + 8 = 0$ წრფის

2. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $(-2,-11)$ წერტილზე და მართობულია $(1,1)$ და $(5,-1)$ წერტილებზე გამავალი წრფის.

3. წრფის დახრის კოეფიციენტების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ოთკუთხედი წვეროებით $A\,(1,1)$,$B\,(7,4)\,,C\,(5,10)$ და $D\,(-1,7)$ პარალელოგრამია.

4. წრფის დახრის კოეფიციენტების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი წვეროებით $A\,(-3,-1)\,,B\,(3,3)$ და $C\,(-9,8)$ მართკუთხაა.

5. წრფის დახრის კოეფიციენტების გამოყენებით დაადგინეთ, მდებარეობენ თუ არა მოცემული წერტილები ერთ წრფეზე

   ა) $(1,1),(3,9)\,,(6,21)\,;$
   ბ) $(-1,3)\,,(1,7)\,,(4,15)\,.$

6. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მართობულია $A\,(1,4)$ და $B\,(7,-2)$ წერტილების შემაერთებელი წრფის და ჰკვეთს მას შუაწერტილში,

7. ააგეთ წრფე, რომელიც გადის საკოორდინატო სისტემის სათავეზე და $A(-3;4)$ წერტილზე. ჩაწერეთ ამ წრფის განტოლება.

8. შეადგინეთ წრფის განტოლება და ააგეთ შესაბამისი წრფე, რომელიც გადის $A(1;6)$ წერტილზე და ორდინატთა ღერძს ჩამოკვეთს $b=3$ სიგრძის ტოლ მონაკვეთს.

9. ჩაწერეთ წრფეთა განტოლებები დახრის კოეფიციენტით

   ა) $3x+4y-7=0;$

   ბ) $x-2y+11=0;$

   გ) $-6x-3y+17=0;$

   დ) $x-y-2=0.$

10. ააგეთ შემდეგი წრფეები

    ა) $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$

    ბ) $y=-3x+7$

    გ) $y=2x$

    დ) $\frac{x}{-3}-\frac{y}{7}=1$

11. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $3x+5y-15=0$ წრფითა და საკოორდინატო ღერძებით.

12. აჩვენეთ, რომ $5x-6y+4=0$ და $20x-24y-13=0$ წრფეები პარალელურია.

13. იპოვეთ $2x-3y+4=0$ და $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

14. იპოვეთ $(-2;3)$ და $(1;5)$ წერტილებზე გამავალი წრფის $y=-2x+7$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

15. მოცემულია წრფის განტოლება: $ax + by = 10$. ააგეთ გრაფიკები ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში ჩამოთვლილი შემთხვევებისთვის:

   ა) $a = 2$, $b = 5$;

   ბ) $a = 1$, $b = 1$;

   გ) $a = 0$, $b = 3$;

   დ) $a = -2$, $b = 0$;

16. ცნობილია, რომ $A\,(x; 2)$ და $B(3; -4)$ წერტილები მდებარეობს ერთ წრფეზე. იპოვეთ $x$ კოორდინატი, თუ ცნობილია, რომ ამ წრფის დახრის კოეფიციენტი 2-ის ტოლია.

17. ცნობილია, რომ $A\,(-3; y)$ და $B(-1; 4)$ წერტილები მდებარეობს ერთ წრფეზე. იპოვეთ $y$ კოორდინატი, თუ ცნობილია, რომ ამ წრფის დახრის კოეფიციენტი -2-ის ტოლია.

# ლექცია 4

# წრფივი ფუნქციების გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

ამ ლექციაში, განვიხილავთ რამდენიმე ეკონომიკურ ამოცანას: მგზავრთა გადაყვანის ხარჯების განსაზღვრა და მგზავრთა გადაყვანის ოპტიმალური ვარიანტის არჩევა, ბაზრის წონასწორობის წერტილის განსაზღვრა. წრფივი ფუნქციების გამოყენებით შევადგენთ მათი ამოხსნისათვის საჭირო მათემატიკურ მოდელებს.

## 4.1 მოთხოვნა-მიწოდების ანალიზი

წრფივ განტოლებათა თეორიის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე ეკონომიკური ხასიათის ამოცანა.

**ამოცანა 4.1 (მგზავრთა გადაყვანის ხარჯების განსაზღვრა)** *ვთქვათ, ტურისტულ კომპანიას ერთი და იგივე ტურისტთა ჯგუფის გადაყვანა ქალაქიდან 30 კილომეტრით დაშორებულ პუნქტამდე უჯდება 40 ლარი, ხოლო 60 კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე -70 ლარი. რა ეღირება ამავე ჯგუფის გადაყვანა ქალაქიდან $x$ კილომეტრ მანძილზე, თუ დამოკიდებულება მანძილსა და მგზავრთა გადაყვანის ხარჯებს შორის წრფივია? ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი.*

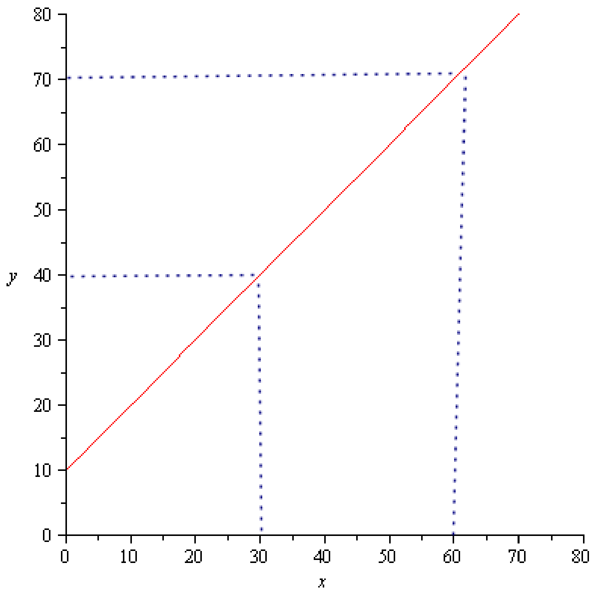
**ამოხსნა.** მგზავრთა გადაყვანის ხარჯები აღვნიშნოთ $y$-ით, ხოლო მანძილი $x$-ით. ამოცანის პირობის თანახმად, მათ შორის დამოკიდებულებას განსაზღვრავს წრფე. ამასთანავე, როდესაც $x = 30$, მაშინ $y = 40$, ხოლო როცა $x = 60$, მაშინ $y = 70$. ამიტომ, ცხადია, აღნიშნული წრფე გაივლის (30,40) და (60,70) წერტილებზე (იხ. სურათი 4.1). მისი შესაბამისი განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$\frac{x - 30}{60 - 30} = \frac{y - 40}{70 - 40}$$

აქედან მარტივად მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას:

$$y = x + 10,$$

რომელიც განსაზღვრავს ქალაქიდან $x$ კმ მანძილზე მგზავრთა გადაყვანის ხარჯებს. ამრიგად, $x$ კმ მანძილზე მგზავრთა გადაყვანის ხარჯები იქნება $(x + 10)$ ლარი. შევნიშნოთ, რომ ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ აქ $x > 0$ და $y > 0$.




სურ 4.1

**ამოცანა 4.2 (მგზავრთა გადაყვანის ოპტიმალური ვარიანტის არჩევა)** *ვთქვათ, მგზავრთა გადაყვანის ხარჯები პირველი სახის ტრანსპორტით გამოისახება $y = 4x+60$ ფორმულით, ხოლო მეორე სახის ტრანსპორტით - $y = 2x + 90$ ფორმულით. გამოიკვლიეთ, რომელი სახის ტრანსპორტით უფრო ხელსაყრელია მგზავრთა გადაყვანა?*

**ამოხსნა.** გამოკვლევა ჩავატაროთ გრაფიკული მეთოდით. ამისათვის ავაგოთ ამოცანაში მითითებული წრფივი ფუნქციების შესაბამისი $L_1$ და $L_2$ წრფეები $OXY$ სიბრტყეში (იხ. სურათი 4.2). ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ცხადია, $x$ ცვლადი უნდა იყოს დადებითი. ამ წრფეების გადაკვეთის $A$ წერტილის საპოვნელად, როგორც ვიცით, უნდა ამოიხსნას სისტემა:

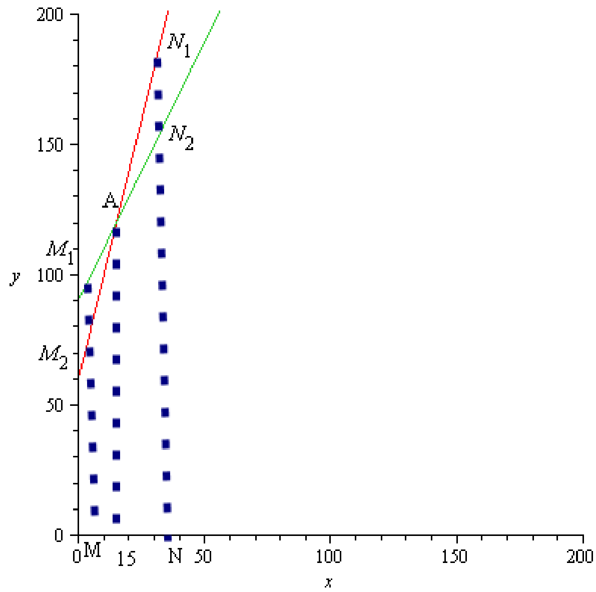
$$\begin{cases} y = 4x + 60; \\ y = 2x + 90. \end{cases}$$

მივიღებთ $A = (15, 120)$. ახლა ჩავატაროთ ანალიზი.

ნახაზიდან ჩანს, რომ თუ $0 < x_0 < 15$, მაშინ $x_0$ მანძილის შესაბამისი ხარჯები პირველი სახის ტრანსპორტით იქნება $MM_1$, მეორე სახის ტრანსპორტით კი - $MM_2$. რადგან $MM_1 < MM_2$, ამიტომ ამ შემთხვევაში მგზავრთა გადაყვანა ხელსაყრელი იქნება პირველი სახის ტრანსპორტით. თუ $x_1$ მანძილი მეტია 15 კმ-ზე, მაშინ მგზავრთა გადაყვანა ხელსაყრელი იქნება მეორე სახის ტრანსპორტით, რადგანაც $NN_1 > NN_2$. საბოლოოდ, თუ ტრანსპორტირება განხორციელდება ზუსტად 15 კმ მანძილზე, მაშინ ორივე ტრანსპორტის დანახარჯი ერთი და იგივეა და შეადგენს 120 ლარს.

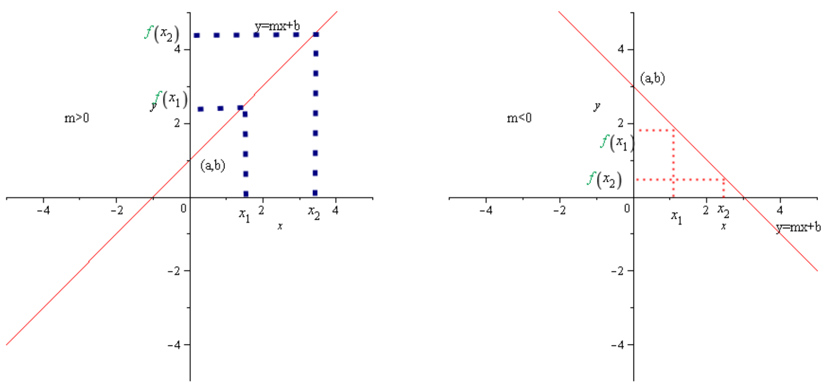
ახლა კი შევუდგეთ მიკროეკონომიკის ორი ძირითადი ცნების განხილვას, რომელთაც მოთხოვნა და მიწოდება ეწოდებათ. მათი საშუალებით კი გავაანალიზებთ საბაზრო ეკონომიკის მეტად მნიშვნელოვან საკითხს, რომელიც მოთხოვნისა და მოწოდების წონასწორობის სახელითაა ცნობილი.

სანამ უშუალოდ შევუდგებოდეთ აღნიშნული საკითხების შესწავლას, გავიხსენოთ რიცხვითი ფუნქციის ცნება.




სურ 4.2

ვთქვათ, გვაქვს ორი ცვლადი სიდიდე $x$ და $y$, რომლებიც მნიშვნელობებს ღებულობენ შესაბამისად $X$ და $Y$ რიცხვითი სიმრავლეებიდან. თუ მოცემულია რაიმე $f$ წესი, რომელიც ყოველ $x \in X$ რიცხვს შეუსაბამებს ერთადერთ $y \in Y$ რიცხვს, მაშინ ვამბობთ, რომ მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია. $x$-ს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი, ანუ არგუმენტი, ხოლო $y$-ს დამოკიდებული ცვლადი. თუ $x$-ის ზრდა იწვევს $y = f(x)$-ის ზრდას, მაშინ $f$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი, ხოლო თუ $x$-ის ზრდა იწვევს $y = f(x)$-ის კლებას, მაშინ $f$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი. როგორც ჩვენთვის უკვე ცნობილია, თუ წრფის დახრის კოეფიციენტი $m$ დადებითია, მაშინ წრფე ზრდადია, ხოლო თუ $m$ უარყოფითია, ნაშინ წრფე კლებადია (იხ. სურათი 4.3).




(a) დახრის კოეფიციენტი დადებითია, ფუნქცია ზრდადია

(b) დახრის კოეფიციენტი უარყოფითია, ფუნქცია კლებადია

სურ 4.3

**შემოვიღოთ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები.**

ვთქვათ, ბაზრის მოთხოვნა რაიმე ფიქსირებულ პროდუქტზე არის $Q$. ცხადია, $Q$ არის რიცხვი, რომელიც აღნიშნავს მოთხოვნილი ნაწარმის რაოდენობას. აღვნიშნოთ

პროდუქციის ერთეულის საბაზრო ფასი $P$ სიმბოლოთი.

საბაზრო ეკონომიკის პირობებში მოთხოვნა $Q$ დამოკიდებულია საბაზრო $P$ ფასზე

$$Q = f(P) \tag{4.1}$$

$f$ ფუნქციის კონკრეტული სახე დგინდება ან ეკონომიკური თეორიიდან, ან საბაზრო მონაცემებიდან. (4.1) დამოკიდებულებას უწოდებენ მოთხოვნის ფუნქციას და ამის მისათითებლად $f$-ს ინდექსად მიუწერენ D ასოს( მოთხოვნა-Demand)

$$Q = f_D(P)$$

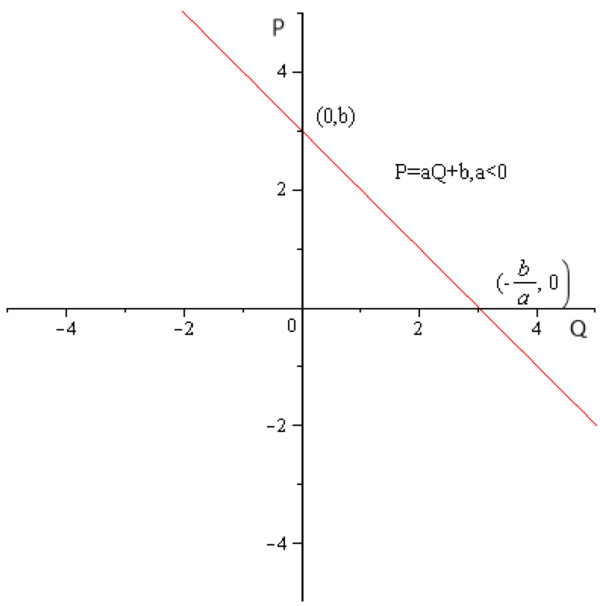
ტრადიციულად, ეკონომისტები მოთხოვნის ფუნქციას წერენ არა (4.1) სახით, არამედ შემდეგნაირად:

$$P = g_D(Q)$$

ე.ი. ფასს გამოსახავენ როგორც მოთხოვნის ფუნქციას. ზოგადად $g_D$ შეიძლება რთული ფუნქცია იყოს. ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა ის წრფივი ფუნქციაა $Q$ -ს მიმართ:

$$P = g_D(Q) = aQ + b \tag{4.2}$$

სადაც $a$ და $b$ რაიმე კონკრეტული მუდმივებია, რომელთაც ეკონომიკაში პარამეტრებს უწოდებენ. რეალურ ცხოვრებაში პროდუქტზე ფასის ზრდა იწვევს ამ პროდუქტზე მოთხოვნის შემცირებას(ან რაც იგივეა, მოთხოვნის ზრდა იწვევს ფასის შემცირებას). ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (4.2)-ით მოცემული მოთხოვნის ფუნქცია (მოთხოვნის წრფე) უნდა იყოს კლებადი (იხ. სურათი 4.4). მაშასადამე, $a$ პარამეტრი, როგორც კლებადი წრფის დახრის კოეფიციენტი, იქნება უარყოფითი.

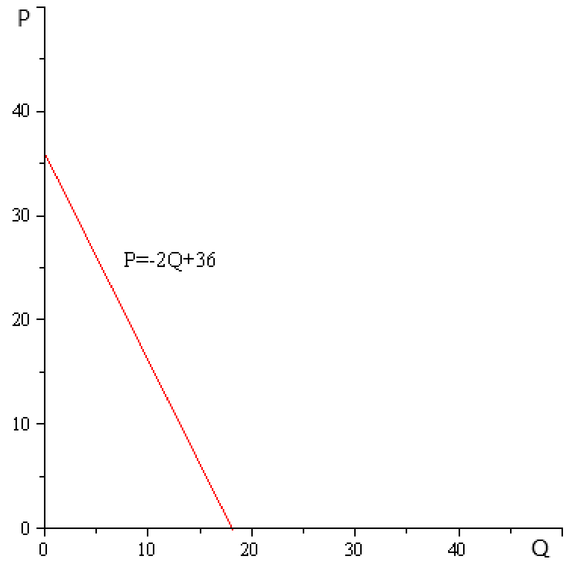



სურ 4.4

გავარკვიოთ $b$ პარამეტრის ეკონომიკური შინაარსი (4.1) ტოლობაში. ცხადია, როცა $P = b$, მაშინ $Q = 0$, ე.ი. როდესაც ფასი არის $b$-ს ტოლი, მაშინ განსახილველ პროდუქციაზე მოთხოვნა არ არსებობს. ამრიგად, $b$ პარამეტრი დადებითია და პროდუქციის ფასი ბაზარზე შემოსაზღვრულია ამ $b$ რიცხვით. ასევე ცხადია, როცა $P = 0$ , მაშინ $Q = -\frac{b}{a} > 0$. ამიტომ $-\frac{b}{a}$ რიცხვი მიუთითებს ბაზრის მაქსიმალურ მოთხოვნას.

**მაგალითი 4.1** *ავაგოთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა*
*$P = -2Q + 36$;*
*ა) რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 12 ?*
*ბ) რას უდრის მოთხოვნა როდესაც ფასია 14?*

**ამოხსნა:** მოთხოვნის წრფის ასაგებად ვიპოვოთ მისი $OQ$ და $OP$ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები (ანუ, $p$-გადაკვეთა და $q$-გადაკვეთა). როცა $P = 0$, მაშინ $Q = 18$, ხოლო როცა $Q = 0$, მაშინ $P = 36$. ამიტომ მოთხოვნის წრფე გაივლის (18,0) და (0,36) წერტილებზე (იხ. სურათი 4.5)




სურ 4.5

ა) თუ $Q = 10$, მაშინ $P = -2(12) + 36 = 16$ , ე.ი. ამ შემთხვევაში პროდუქციის ფასია 16.

ბ) როცა $P = 14$, მაშინ გვექნება 14=-2Q+36, ანუ $Q = 11$, ე.ი. , როცა ფასია $P = 14$, მაშინ მოთხოვნაა $Q = 11$.

ახლა განვიხილოთ **მიწოდების** ფუნქცია. ის შესაბამისობას ამყარებს რაიმე პროდუქციის ერთეულის $P$ ფასსა და ამავე პროდუქციის იმ $Q$ რაოდენობას შორის, რომლის ბაზარზე შეტანასაც გეგმავს მწარმოებელი. ეკონომიკური თეორია და ცხოვრებისეული პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ ფასის ზრდას მოსდევს მიწოდების ზრდა. ამიტომ მიწოდების ფუნქცია **(suplly function)**

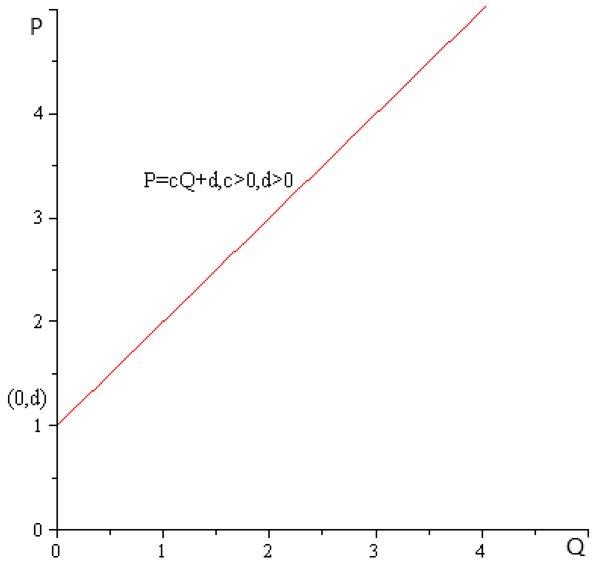
$$P = g_S(Q), \tag{4.3}$$

იქნება ზრდადი ფუნქცია. აქ $P$ არის მწარმოებლის მიერ დადგენილი მიწოდებული საქონლის ერთი ერთეულის ფასი. აქაც განვიხილოთ ის კონკრეტული შემთხვევა, როცა $g_s(Q)$ წრფივი ფუნქციაა, ე.ი.

$$P = g_S(Q) = cQ + d, \tag{4.4}$$

სადაც $c$ და $d$ მუდმივებია. მიწოდების წრფის ზრდადობიდან გამომდინარეობს, რომ მისი დახრის კოეფიციენტი $c > 0$. რადგანაც ფასი ყოველთვის დადებითია, ამიტომ

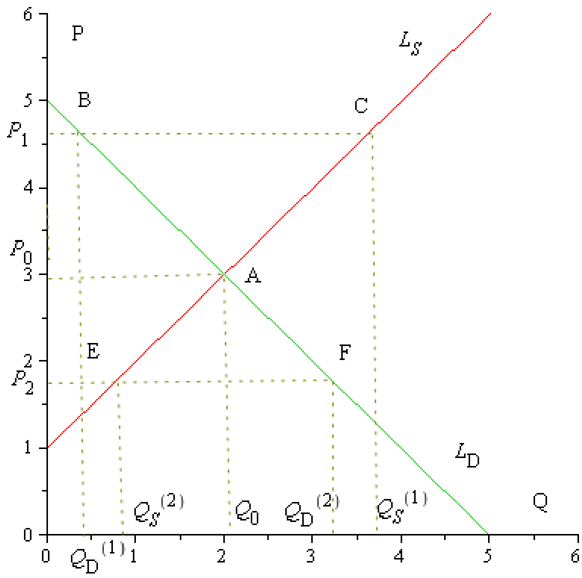
(4.3) ტოლობაში $d$ პარამეტრიც (წრფის $p$- გადაკვეთა) დადებითია. ავაგოთ მიწოდების წირის (წრფის) გრაფიკი.




სურ 4.6

ნახაზიდან (იხ. სურათი 4.6) ჩანს, რომ მწარმოებელი დაგეგმავს პროდუქციის შეტანას ბაზარზე მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ფასი გადააჭარბებს $d$ სიდიდეს.

ავაგოთ ახლა ერთსა და იმავე $OQP$ სიბრტყეზე მოთხოვნის $L_D$ და მიწოდების $L_S$ წრფეები.




სურ 4.7

ჩავატაროთ ნახაზის ანალიზი (იხ. სურათი 4.7). ჯერ განვიხილოთ $P_1$ ფასის შესაბამისი $B$ და $C$ წერტილები $L_D$ და $L_S$ წრფეებზე. როგორც ნახაზიდან ჩანს $P_1$ ფასს შეესაბამება $Q_D^{(1)}$ მოთხოვნა და $Q_S^{(1)}$ მიწოდება, ამასთან $Q_D^{(1)} < Q_S^{(1)}$, ე.ი. მოთხოვნა ნაკლებია მიწოდებაზე. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ბაზარზე გვაქვს ჭარბი პროდუქცია.

ახლა განვიხილოთ $P_2$ ფასის შესაბამისი $E \in L_S$ და $F \in L_D$ წერტილები. ცხადია, რომ $P_2$ ფასის შემთხვევაში $Q_D^{(2)} > Q_S^{(2)}$, ე.ი. მოთხოვნა სჭარბობს მიწოდებას. ანუ, საქმე გვაქვს პროდუქციის დეფიციტთან. რა თქმა უნდა, ეს ორივე შემთხვევა არასასურველია ბაზრისთვის.

ახლა განვიხილოთ $P_0$ ფასის შესაბამისი სიტუაცია. მას შეესაბამება $L_D$ და $L_S$ წრფეების საერთო $A$ წერტილი(როგორც ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილი), რომლის აბსცისაა $Q_0$. ანუ, $P_0$ ფასზე მოთხოვნა ემთხვევა მიწოდებას. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ **ბაზარი გაწონასწორებულია**-იყიდება იმ რაოდენობის პროდუქცია, რა რაოდენობის პროდუქციაც მიეწოდება ბაზარს. ამ $P_0$ ფასს ეწოდება წონასწორობის ფასი, შესაბამის $Q_0$ -ს კი -წონასწორობის სიდიდე. როგორ ვიპოვოთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე? ვინაიდან ეს სიდიდეები წარმოადგენენ მოთხოვნისა და მიწოდების წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს, ამიტომ, ცხადია, მათ საპოვნელად უნდა ამოიხსნას მოთხოვნისა და მიწოდების წრფეების განტოლებებისგან შედგენილი სისტემა. ამ სისტემის $(Q_0, P_0)$ ამონახსნი წარმოადგენს სწორედ წონასწორობის წერტილის კოორდინატებს.

**მაგალითი 4.2** *მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები მოცემულია შესაბამისად* $P = -3Q + 60$ *და* $P = 2Q + 10$ *ტოლობებით. იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე.*

**ამოხსნა:** როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, წონასწორობის ფასისა და წონასწორობის სიდიდის საპოვნელად უნდა ამოიხსნას შემდეგი სისტემა

$$\begin{aligned} P &= 2Q + 10 \\ P &= -3Q + 60 \end{aligned}$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს განტოლებათა მარჯვენა მხარეები. მივიღებთ:

$$2Q + 10 = -3Q + 60$$

საიდანაც $5Q = 50$ და $Q = 10$. მაშინ $P$-ს შესაბამისი მნიშვნელობა იქნება $P = 2(10) + 10 = 30$. ამრიგად, წონასწორობის წერტილის კოორდინატებია (10,30).

## 4.2 სავარჯიშოები:

1. წარმოების დანახარჯები გარკვეული საქონლის 200 ერთეულის საწარმოებლად შეადგენს 500 ლარს, ხოლო 600 ერთეულის საწარმოებლად-900 ლარს. განსაზღვრეთ წარმოების დანახარჯები საქონლის 380 ერთეულის საწარმოებლად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ დანახარჯების ფუნქცია წრფივია.

2. ვთქვათ, ერთი და იმავე ტვირთის გადატანა მოცემული ქალაქიდან 40 კილომეტრ მანძილზე ღირს 70 ლარი, ხოლო 70 კილომეტრ მანძილზე 100 ლარი. რა ეღირება იმავე ტვირთის გადატანა $x$ კმ მანძილზე მოცემული ქალაქიდან, თუ ცნობილია,რომ დამოკიდებულება მანძილსა და ტვირთის გადატანის ხარჯებს შორის წრფივია.

3. ქარხნის საწარმოო სიმძლავრე ისეთია, რომ მას შეუძლია საათში აწარმოოს 300 კგ ძეხვი, ან 500 კგ სოსისი. ქარხანას შეუძლია ერთდროულად აწარმოოს ძეხვიც და სოსისიც. შეადგინეთ განტოლება, რომელიც დაახასიათებს ქარხნის საწარმოო სიმძლავრეს, თუ დამოკიდებულება წარმოებული ძეხვისა და სოსისის რაოდენობებს შორის წრფივია.

4. ვთქვათ, რაიმე წარმოებას აქვს 300 ტონა ნედლეული, რომელიც უნდა გაიხარჯოს 20 დღის განმავლობაში. იპოვეთ კავშირი დასახარჯი ნედლეულისა და განვლილი დღეების რაოდენობას შორის, თუ ეს დამოკიდებულება წრფივია.

5. როგორც ცნობილია, ტემპერატურა შეიძლება გაიზომოს ცელსიუსისა და ფარენჰეიტის სკალით. $0°C$ ტოლია $32°F$-ის, ხოლო $100°C$ ტოლია $212°F$-ის. იპოვეთ დამოკიდებულება ამ ორი სკალით გაზომილი ტემპერატურის მნიშვნელობებს შორის, თუ ცნობილია , რომ ეს დამოკიდებულება წრფივია.

   ა) რამდენი ცელსიუსია $65°F$?

   ბ) რამდენი ფარენჰეიტია $70°C$?

6. ტურისტულმა ფირმამ გადაწყვიტა 2100 ლარის დახარჯვა თავისი სერვისების სატელევიზიო რეკლამაზე. სარეკლამო რგოლის დამზადება ფირმას უჯდება 500 ლარი, ხოლო მისი სატელევიზიო ეთერში განთავსება თითოეულ ჯერზე - 40 ლარი. რამდენჯერ გავა ეთერში აღნიშნული სარეკლამო რგოლი?

7. ფირმის თანამშრომელი ვალდებულია იმუშაოს კვირაში 40 საათი. თუ მისი სამუშაო საათების რაოდენობა კვირაში გადააჭარბებს 40 საათს, მაშინ მას ყოველ ზენორმატიულ საათში უხდიან 2-ჯერ მეტ თანხას. როგორია თანამშრომლის საათობრივი ანაზღაურება, თუ ერთ კვირაში 50 საათის მუშაობისთვის მან მიიღო 650 ლარი?

8. ორი სახის ტრანსპორტით მგზავრთა გადაყვანის ხარჯები გამოისახება ფუნქციებით:

   ა) $y = 20x + 260$ და $y = 16x + 360$

   ბ) $y = 6x + 100$ და $y = 9x + 40$

   სადაც $x$ მანძილია, ხოლო $y$ დანახარჯები. რომელი სახის ტრანსპორტის გამოყენებაა უფრო ეკონომიური?

9. ააგეთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$P = -4Q + 100$$

   ა) რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 15?

   ბ) რას უდრის მოთხოვნა, როცა ფასია 20?

   გ) როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის ორი ერთეულით შემცირებისას?

10. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია და ააგეთ მოთხოვნის წირი, თუ ცნობილია, რომ როცა პროდუქციის ერთეულის ფასი არის 20 ლარი, მაშინ მოთხოვნაა 30 და როცა ფასია 10 ლარი, მაშინ მოთხოვნა 35 ერთეულის ტოლია. ცნობილია, რომ მოთხოვნის ფუნქცია წრფივია.

11. ააგეთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$P = -3Q + 90$$

ა) რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 20?

ბ) რას უდრის მოთხოვნა, როცა ფასია 60?

გ) როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის ოთხი ერთეულით შემცირებისას?

დ) როგორ იცვლება მოთხოვნა ფასის სამი ერთეულით გაზრდისას?

12. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$P = -5Q + 350$$

ა) რა საზღვრებში იცვლება მოთხოვნა?

ბ) რა საზღვრებში იცვლება ფასი?

გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.

13. ააგეთ მიწოდების წირი, თუ მიწოდების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$P = 4Q + 10$$

ა) რას უდრის ფასი, თუ მიწოდებაა 12?

ბ) რას უდრის მიწოდება, როცა ფასია 70?

გ) როგორ იცვლება მიწოდება ფასის 2 ერთეულით გაზრდის შემთხვევაში?

14. ჩაწერეთ მიწოდების ფუნქცია და ააგეთ შესაბამისი მიწოდების წირი, თუ ცნობილია, რომ როცა ფასი არის 400 ლარი, მაშინ ფირმა გეგმავს პროდუქციის 100 ერთეულის შეტანას ბაზარზე, ხოლო როცა ფასი არის 640 ლარი, მაშინ ფირმა შეიტანს ბაზარზე პროდუქციის 180 ერთეულს. იგულისხმება, რომ მიწოდების ფუნქცია წრფივია.

15. მიწოდების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$P = 0.5Q + 30$$

ააგეთ შესაბამისი მიწოდების წირი.

ა) რა საზღვრებში იცვლება მიწოდება?

ბ) რა საზღვრებში იცვლება ფასი?

გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.

16. იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები მოცემულია შემდეგი სახით:

ა) $P = -3Q + 60$, $P = 2Q + 10$;
ბ) $P = -6Q + 100$, $P = 0.5Q + 22$;
გ) $P = -4Q + 80$, $P = 0.5Q + 17$;
დ) $P = -3Q + 100$, $P = 0.5Q + 30$.

# ლექცია 5

# კვადრატული ფუნქციის გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

ამ ლექციაში, შევისწავლით კვადრატული ფუნქციის თვისებებს. განვიხილავთ კვადრატული ფუნქციის გამოყენებას ეკონომიკურ ამოცანებში, კერძოდ, კი მთლიანი ამონაგებისა და მაქსიმალური მოგების მნიშვნელობების საპოვნელად.

## 5.1 კვადრატული ფუნქცია. მთლიანი ამონაგების, მთლიანი დანახარჯისა და მოგების ფუნქციები.

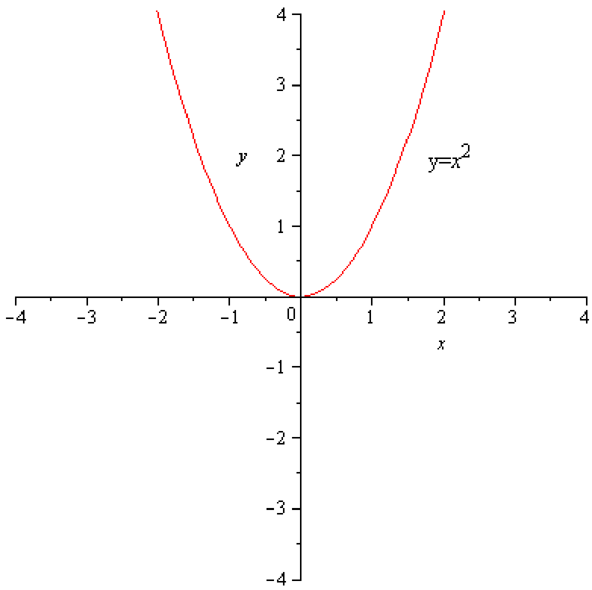
ერთ-ერთი უმარტივესი არაწრფივი ფუნქცია, რომელიც ცნობილია **კვადრატული ფუნქციის** სახელწოდებით, მოიცემა შემდეგი სახით:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

სადაც $a$, $b$ და $c$ რაიმე პარამეტრებია (ნამდვილი რიცხვებია) და $a \neq 0$. თუ $a = 1$ და $b = c = 0$, მაშინ ფუნქცია მიიღებს სახეს

$$f(x) = x^2$$

მისი გრაფიკის ასაგებად $x$ არგუმენტს მივანიჭოთ რამდენიმე მნიშვნელობა, მაგ. -3; -2;-1;0;1;2;3 და ვიპოვოთ $y$-ის შესაბამისი მნიშვნელობები. თუ ამ $(x, y)$ კოორდინატებიან წერტილებს ავაგებთ სიბრტყეზე, მივიღებთ წირს, რომელსაც **პარაბოლა** ეწოდება (სურ. 5.1). ეკონომისტები მას ასევე უწოდებენ $U$ ტიპის წირს. შევნიშნოთ, რომ ეს პარაბოლა სიმეტრიულია $y$ ღერძის მიმართ და გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე, რომელიც თავის მხრივ მის მინიმუმის წერტილს წარმოადგენს.




სურ 5.1

საზოგადოდ,

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

ფუნქციის გრაფიკიც პარაბოლას წარმოადგენს. თუ $a > 0$, მაშინ მისი შტოები მიმართულია ზემოთ("ბედნიერი პარაბოლა"). ასეთი პარაბოლის სიბრტყეზე მდებარეობა დამოკიდებულია ასევე $D = b^2 - 4ac$ სიდიდეზე, რომელსაც **დისკრიმინანტი** ეწოდება. სწორედ ეს შემთხვევებია განხილული სურათი 5.2–ზე. ანალოგიურად, თუ $a < 0$, მაშინ შტოები მიმართულია ქვემოთ ("მოწყენილი პარაბოლა") (იხ. სურათი 5.3).

პარაბოლის $y$-გადაკვეთის საპოვნელად მის განტოლებაში ჩავსვათ $x = 0$. მივიღებთ

$$f(0) = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c = c$$

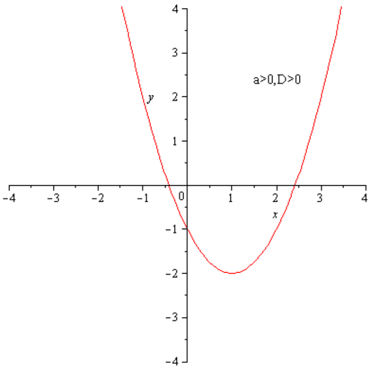
ე.ი. თავისუფალი წევრი $c$ გამოსახავს იმ წერტილს, სადაც წირი კვეთს ვერტიკალურ $y$ ღერძს. პარაბოლა გადაკვეთს $x$ ღერძს იმ წერტილში, რომლისთვისაც $y = 0$. ცხადია, ამ წერტილ(ებ)ის საპოვნელად, თუკი ისინი არსებობენ, უნდა ამოიხსნას შემდეგი კვადრატული განტოლება

$$ax^2 + bx + c = 0$$

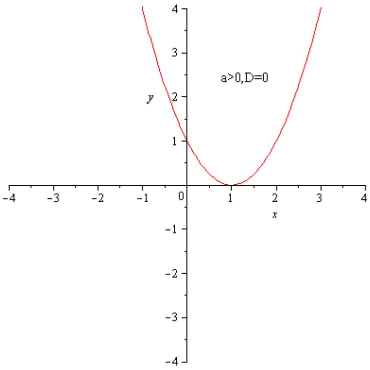
საზოგადოდ, ასეთ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს ორი ამონახსნი, ერთი ამონახსნი ან საერთოდ არ ჰქონდეს ამონახსნი. ეს ამონახსნები მოიცემა ფორმულით:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5.1}$$

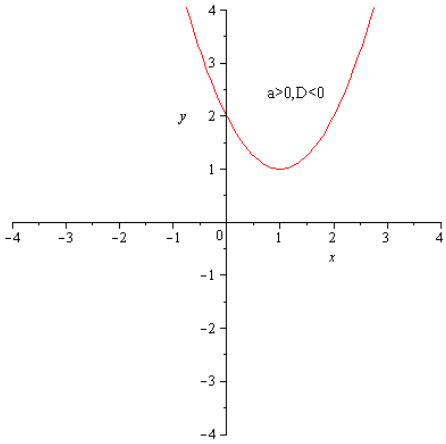
ამ ფორმულიდან ცხადია, რომ თუ $D = b^2 - 4ac > 0$, მაშინ განტოლებას ექნება ორი ამონახსნი, რაც იმას ნიშნავს, რომ პარაბოლა $x$ ღერძს გადაჰკვეთს ორ წერტილში (სურ. 5.2-ის (a) და სურ. 5.3-ის (a)). როცა $D = b^2 - 4ac = 0$, მაშინ განტოლებას




(a)




(b)




(c)

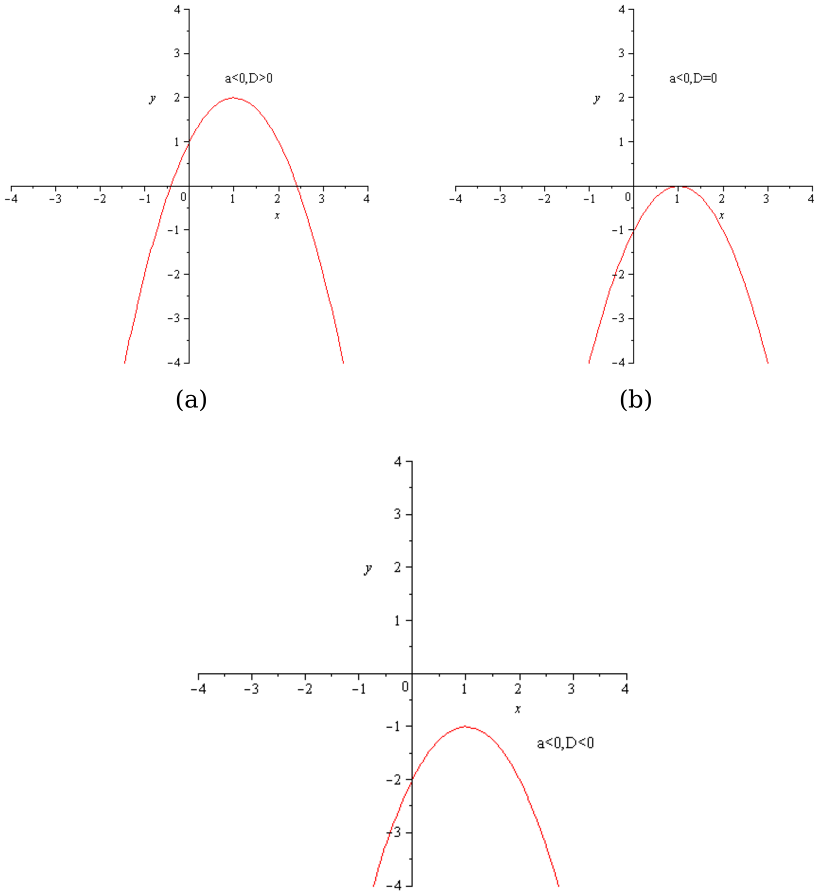
სურ 5.2

აქვს ერთი ამონახსნი, ანუ პარაბოლა მხოლოდ ერთ წერტილში ეხება $x$ ღერძს (სურ. 5.2-ის (b) და სურ. 5.3-ის (b)). და ბოლოს, თუ $D = b^2 - 4ac < 0$, მაშინ განტოლებას არ აქვს ამონახსნი ნამდვილ რიცხვებში, ე.ი. პარაბოლას და $x$ ღერძს არ გააჩნიათ არც ერთი საერთო წერტილი (სურ. 5.2-ის (c) და სურ. 5.3-ის (c)). ჩვენთვის საინტერესოა პარაბოლის კიდევ ერთი წერტილი. ეს ის წერტილია, სადაც გრაფიკი "აკეთებს მობრუნებას". ამ წერტილს პარაბოლის **წვერო** ეწოდება. თუ პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ, მაშინ წვერო წარმოადგენს მინიმუმის წერტილს, ხოლო თუ შტოები მიმართულია ქვემოთ, ის წარმოადგენს მაქსიმუმის წერტილს. წვეროს კოორდინატები შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ y &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a} \end{aligned}$$

**მაგალითი 5.1** *ავაგოთ შემდეგი კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი*

$$f(x) = -x^2 + 8x - 12$$



(a) (b)

(c)

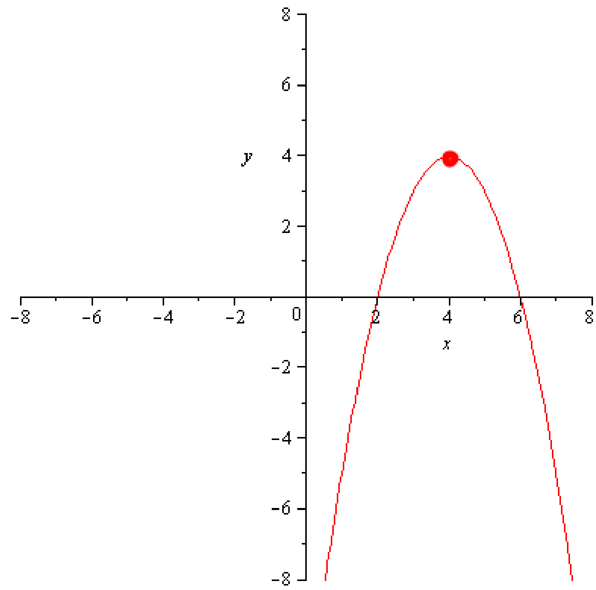
სურ 5.3

**ამოხსნა:** *$x^2$-ის კოეფიციენტია -1, რაც იმას ნიშნავს, რომ პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვემოთ. თავისუფალი წევრი არის -12, ე.ი. გრაფიკი ვერტიკალურ ღერძს ჰკვეთს წერტილში $y = -12$. ახლა კი ამოვხსნათ კვადრატული განტოლება: $-x^2 + 8x - 12 = 0$. (5.1) ფორმულიდან მივიღებთ:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{(8^2 - 4(-1)(-12))}}{2(-1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{(64 - 48)}}{-2} = \\ &= \frac{-8 \pm 4}{-2} \end{aligned}$$

*საიდანაც, $x_1 = 2$ და $x_2 = 6$. მაშასადამე, გრაფიკი ჰორიზონტალურ $x$ ღერძს გადაკვეთს $x_1 = 2$ და $x_2 = 6$ წერტილებში. ბოლოს გამოვთვალოთ წვეროს კოორდინატები: $x = -\frac{8}{-2} = 4$ ; $y = -\frac{64-48}{-4} = 4$. მაშასადამე, პარაბოლის მაქსიმუმის წერტილის კოორდინატები არის (4,4). მიღებული მონაცემებით ავაგოთ გრაფიკის ესკიზი (იხ. სურათი 5.4).*

ახლა კი შემოვიღოთ რამდენიმე ფუნქცია, რომელთაც დიდი გამოყენება აქვთ წარმოების სფეროს მათემატიკურ მოდელებში.




სურ 5.4

ვთქვათ, საქონლის ერთეულის ფასია $P$. **მთლიანი ამონაგები (TR)** (Total Revenue) არის საწარმოს მიერ $Q$ რაოდენობის საქონლის რეალიზაციით მიღებული თანხა. ამიტომ მთლიანი ამონაგების ფუნქციას აქვს სახე

$$TR = P \cdot Q = Q \cdot f_D(Q) \tag{5.2}$$

სადაც $f_D(Q)$ მოთხოვნის ფუნქციაა.

**მთლიანი დანახარჯი (TC)** (Total Costs) არის თანხა, რომელიც დაიხარჯა საწარმოს მიერ $Q$ რაოდენობის პროდუქციის წარმოებისათვის. წარმოების მთლიანი დანახარჯი დროის მოკლე პერიოდში იყოფა ე.წ. ფიქსირებულ და ცვლად დანახარჯებად.

**წარმოების ფიქსირებული დანახარჯი (FC)** (Fixed Costs) არაა დამოკიდებული წარმოებული პროდუქციის რაოდენობაზე და იგი დაკავშირებულია მიწის გადასახადთან, რენტასთან, აღჭურვილობასთან. ცხადია, ამ ტიპის დანახარჯების მუდმივობა პირობითია, რადგან ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში მათ შეიძლება ცვლილება განიცადონ.

**წარმოების ცვლადი დანახარჯი (VC)** (Variable Costs) არის პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის დახარჯული თანხა.

**მთლიანი ცვლადი დანახარჯი (TVC)** (Total Variable Costs), რომელიც შეესაბამება პროდუქციის $Q$ რაოდენობის წარმოებას, გამოითვლება ფორმულით

$$(TVC) = (VC) \cdot Q.$$

ცხადია, წარმოების მთლიანი დანახარჯი ტოლია ფიქსირებული დანახარჯისა და მთლიანი ცვლადი დანახარჯის ჯამისა

$$(TC) = (FC) + (VC) \cdot Q. \tag{5.3}$$

**მოგების ფუნქცია** $\Pi$ განისაზღვრება, როგორც სხვაობა მთლიან ამონაგებსა (TR) და მთლიან დანახარჯებს (TC) შორის

$$\Pi = (TR) - (TC)$$

**მაგალითი 5.2** *მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია*

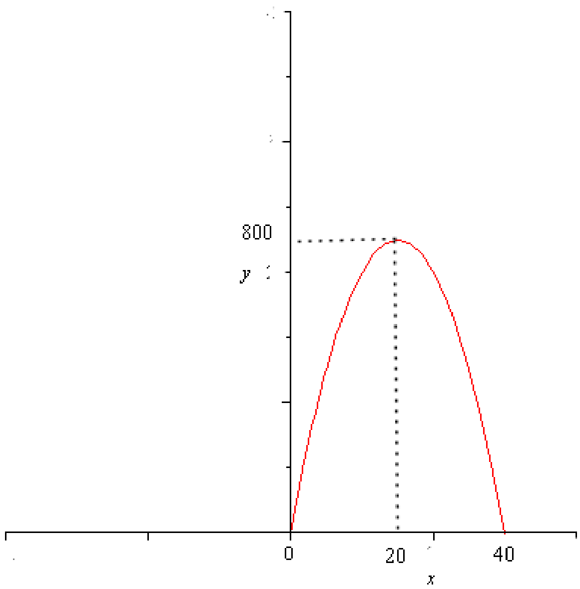
$$P = 80 - 2Q.$$

*გამოვსახოთ მთლიანი ამონაგების* $(TR)$ *ფუნქციის* $Q$ *რაოდენობაზე დამოკიდებულება და ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი. ჩავატაროთ ანალიზი გრაფიკის მიხედვით.*

**ამოხსნა.** (5.2) ფორმულის ძალით

$$(TR) = Q \cdot P = Q(80 - 2Q) = -2Q^2 + 80Q$$

როგორც ვხედავთ, მთლიანი ამონაგების ფუნქცია აღმოჩნდა კვადრატული ფუნქცია $Q$-ს მიმართ. მაშასადამე, მის გრაფიკს წარმოადგენს პარაბოლა, რომლის შტოები მიმართულია ქვემოთ (ვინაიდან $Q^2$-ის კოეფიციენტი უარყოფითია). აბსცისთა ღერძზე გადავზომოთ $Q$ რაოდენობა, ხოლო ორდინატთა ღერძზე მთლიანი ამონაგები $(TR)$. გრაფიკის $Q$-გადაკვეთის საპოვნელად გავუტოლოთ კვადრატული ფუნქცია 0-ს. მივიღებთ: $-2Q^2 + 80Q = 0$. საიდანაც $Q_1 = 0$ და $Q_2 = 40$. პარაბოლის წვეროს კოორდინატები კი იქნება (20, 800) (იხ. სურათი 5.5).




სურ 5.5

გრაფიკიდან ჩანს, რომ მთლიანი ამონაგები მაქსიმალურია, როცა გაიყიდება პროდუქციის $Q = 20$ ერთეული და ეს მაქსიმალური თანხა შეადგენს $TR = 800$-ს. პროდუქციის ერთეულის ფასი ამ შემთხვევაში იქნება $P = 80 - 2Q = 80 - 2(20) = 40$.

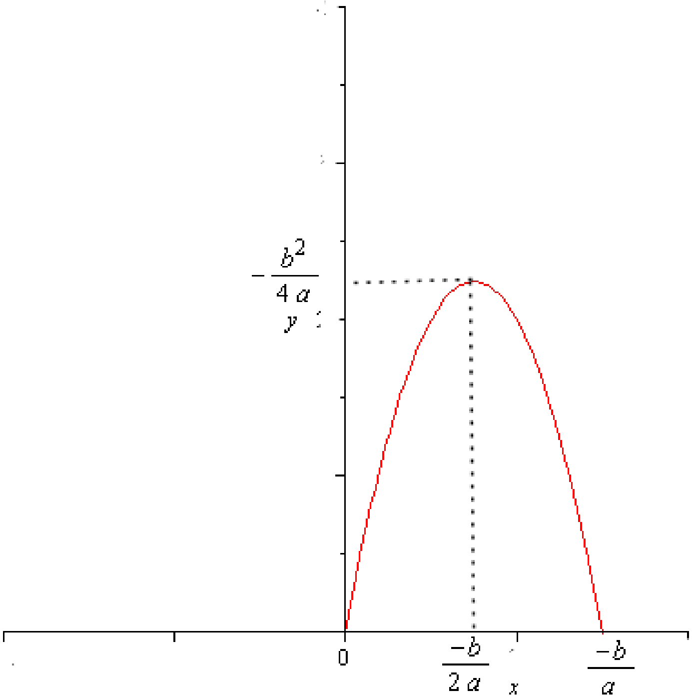
ზოგადად, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია წრფივი ფუნქციის სახით

$$P = aQ + b, \quad a < 0, \;\; b > 0,$$

მაშინ მთლიანი ამონაგების ფუნქცია $(TR)$ წარმოდგება კვადრატული ფუნქციის ფორმით

$$TR = Q \cdot P = Q(aQ + b) = aQ^2 + bQ.$$

რადგან $a<0$, ამიტომ შესაბამისი პარაბოლის შტოები მიმართული იქნება ქვემოთ და $(TR)$ ფუნქცია მაქსიმუმს მიაღწევს მის წვეროზე, ანუ როდესაც $Q=-\frac{b}{2a}$. ამასთან, ეს მაქსიმალური მნიშვნელობა იქნება $TR=-\frac{b^2}{4a}$. (იხ. სურათი 5.6)




სურ 5.6

შევნიშნოთ, რომ მთლიანი დანახარჯი $(TC)$ ყოველთვის ვერ ასახავს საწარმოს ეფექტურობას. განვიხილოთ მაგალითი.

**მაგალითი 5.3** *ვთქვათ, საერთაშორისო საავტომობილო კომპანია ამუშავებს ორ ქარხანას, ერთს აშშ-ში, ხოლო მეორეს ევროპაში. აშშ-ში მთლიანი წლიური დანახარჯია 200 მლნ. დოლარი, ხოლო ევროპაში- 45 მლნ. დოლარი. ამასთან, აშშ-ს ქარხანა აწარმოებს 80 000 ავტომანქანას, ხოლო ევროპისა- 15 000 ავტომანქანას. რომელი ქარხანა უფრო მომგებიანია (რენტაბელურია)?*

**ამოხსნა:** ცხადია, რომ ორივე ქარხნის მთლიანი დანახარჯი მომგებიანობის თვალსაზრისით არავითარ ინფორმაციას არ იძლევა. ქარხნის რენტაბელობა გამოჩნდება ერთი ავტომანქანის წარმოებაზე საშუალოდ დახარჯული თანხების შედარებით. აშშ-ს ქარხნისათვის ეს თანხა იქნება $\frac{(TC)_{usa}}{80000}=\frac{200000000}{80000}=2500\$$, ხოლო ევროპის ქარხნისათვის $\frac{(TC)_{EU}}{15000}=\frac{45000000}{15000}=3000\$$. აქედან ცხადია, რომ აშშ-ს ქარხანა უფრო მომგებიანია(რენტაბელურია), ვიდრე ევროპისა.

როგორც ამ მაგალითიდან ჩანს, ზემოთ განხილულ ეკონომიკურ ფუნქციებთან ერთად მნიშვნელოვანი როლი ენიჭება **საშუალო დანახარჯის (AC) (Average Costs)** ფუნქციას, რომელიც გამოითვლება მთლიანი დანახარჯის (TC) გაყოფით გამოშვებული პროდუქციის $Q$ რაოდენობაზე.

$$(AC)=\frac{(TC)}{Q}=\frac{(FC)+(VC)Q}{Q}=\frac{(FC)}{Q}+(VC) \tag{5.4}$$

**მაგალითი 5.4** *ვთქვათ, რომელიმე საწარმოს მუდმივი დანახარჯია 1000 ლარი, ხოლო ცვლადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე- 4 ლარი. გამოვსახოთ $(TC)$ მთლიანი დანახარჯი და $(AC)$ საშუალო დანახარჯი პროდუქციის $Q$ რაოდენობის მიხედვით. ავაგოთ შესაბამისი ნახაზები.*

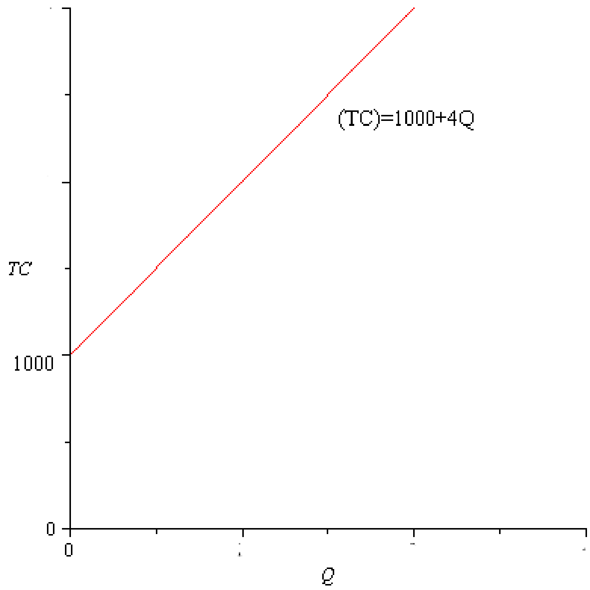
პირობის თანახმად $(FC) = 1000$ და $(VC) = 4$. ამიტომ (5.3) ფორმულიდან

$$(TC) = 1000 + 4Q$$

$(AC)$ საშუალო დანახარჯისთვის კი (5.4)-დან მივიღებთ

$$(AC) = \frac{1000}{Q} + 4$$

(TC) ფუნქცია წრფივია $Q$-ს მიმართ და მისი გრაფიკი გამოსახულია სურ. 5.7-ზე. (AC)-ს გრაფიკი წარმოადგენს ჰიპერბოლას (იხ. სურათი 5.8)




სურ 5.7

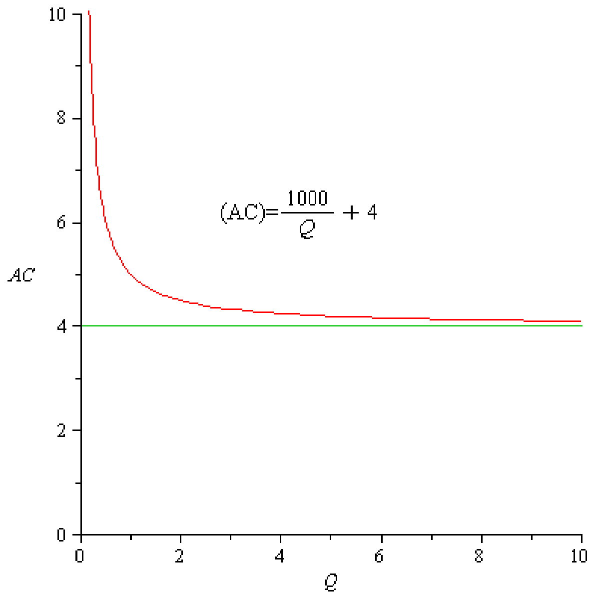
შევნიშნოთ, რომ როცა $Q$ ძალიან მცირდება, მაშინ $(AC)$ ძალიან იზრდება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $(AC)$ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული $Q = 0$-ის მიდამოში. მეორეს მხრივ, როცა $Q$ ძალიან დიდია, მაშინ $\frac{1000}{Q}$ წილადის მნიშვნელობები უახლოვდება 0-ს, ხოლო (AC) სიდიდე 4-ს.

როგორც ვიცით, მოგების ფუნქცია $\Pi$ განიმარტება შემდეგნაირად

$$\Pi = (TR) - (TC) = (aQ^2 + bQ) - (cQ + d) \tag{5.5}$$

შევისწავლოთ ამ ფუნქციის თვისებები (იხ. სურათი 5.9).

ნახაზიდან ჩანს, რომ $(0, Q_1)$ და $(Q_B, Q_C)$ შუალედებში მთლიანი დანახარჯის გრაფიკი უფრო ზემოთაა, ვიდრე მთლიანი ამონაგების გრაფიკი; ამიტომ აქ დანახარჯი




სურ 5.8

სჭარბობს შემოსავალს. $Q_A$ და $Q_B$ წერტილებში მთლიანი დანახარჯი და მთლიანი ამონაგები ერთმანეთის ტოლია. ამ რეჟიმს **ნულოვან ზღვარზე მუშაობა** ეწოდება. რაც შეეხება $(Q_A,Q_B)$ შუალედს, აქ მთლიანი ამონაგების მრუდი უფრო ზემოთაა, ვიდრე მთლიანი დანახარჯისა, ე.ი. ამონაგები სჭარბობს დანახარჯს და გვაქვს მოგება. $EF$-ის მაქსიმალურ სიგრძეს შეესაბამება მაქსიმალური მოგება. ასეთი სიტუაცია მიიღწევა რომელიღაც $Q$-თვის $(Q_A,Q_B)$ შუალედიდან. ამ მაქსიმალური მოგების მოსაძებნად უმჯობესია გამოვიყენოთ (5.5) ფორმულა, რომელიც გამოსახავს მოგების $\Pi$ ფუნქციას კვადრატული სამწევრის სახით, რომლის შესაბამისი გრაფიკის (პარაბოლის) შტოები ქვემოთაა მიმართული. ამის გამო მას აუცილებლად გააჩნია უდიდესი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება მაქსიმალურ მოგებას.

**მაგალითი 5.5** *წარმოების მუდმივი დანახარჯია 4 ლარი, ცვლადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე შეადგენს 1 ლარს. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -2Q + 10$. გამოვსახოთ მოგების $\Pi$ ფუნქცია $Q$-ს საშუალებით. ასევე გავარკვიოთ:*

*1) საქონლის რა რაოდენობა შეესაბამება ნულოვან ზღვარზე მუშაობას?*

*2) რას უდრის მოგების მაქსიმალური სიდიდე?*

**ამოხსნა:** როგორც ვიცით, მოგების ფუნქცია მოიცემა ფორმულით $\Pi = (TR)-(TC)$. ჩვენს პირობებში $(TR) = Q \cdot P = Q(-2Q + 10) = -2Q^2 + 10Q$. რადგანაც $(FC) = 4$ და $(VC) = 1$, ამიტომ $(TC) = (FC) + (VC)Q = 4 + Q$.მაშინ მოგების ფუნქციისთვის მივიღებთ

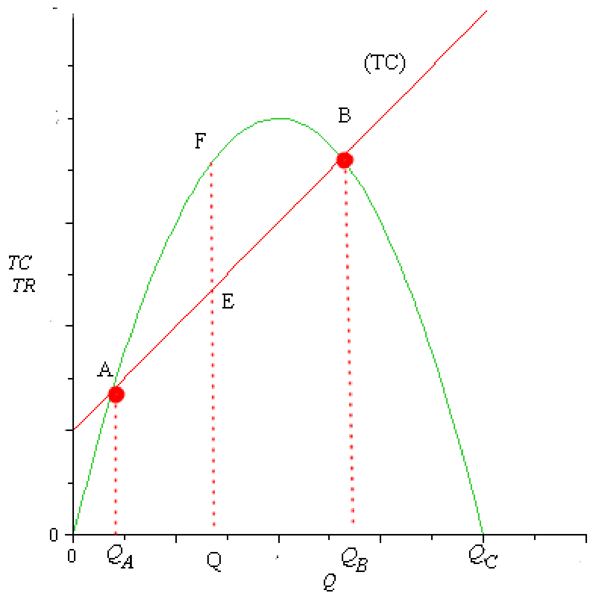
$$\Pi = (-2Q^2 + 10Q) - (4 + Q) = -2Q^2 + 9Q - 4$$

განვიხილოთ განტოლება

$$-2Q^2 + 9Q - 4 = 0$$

მისი ამონახსნებია

$$Q_1 = \frac{1}{2}$$




სურ 5.9

$$Q_2 = 4$$

ესაა სწორედ ის რაოდენობები, რომელთაც შეესაბამება ნულოვან ზღვარზე მუშაობა.

$\Pi$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობის მოსაძებნად ვიპოვოთ პარაბოლის წვეროს კოორდინატები:

$$Q_0 = -\frac{9}{2\cdot(-2)} = \frac{9}{4}, \Pi_0 = -\frac{9^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-4)}{4\cdot(-2)} = 6.125$$

ამრიგად, მოგების ფუნქციის მაქსიმალური სიდიდეა $\Pi_0 = 6.125$, რომელიც შეესაბამება $Q_0 = \frac{9}{4}$ რაოდენობის პროდუქციას.

## 5.2 სავარჯიშოები:

1. ამოხსენით შემდეგი კვადრატული განტოლებები

   ა) $x^2 = 81$

   ბ) $x^2 = 36$

   გ) $2x^2 = 8$

   დ) $(x-1)^2 = 9$

   ე) $(x+5)^2 = 16$

2. იპოვეთ შემდეგი განტოლებების ამონახსნები

   ა) $(x-1)(x+3) = 0$

   ბ) $(2x-1)(x+10) = 0$

   გ) $(3x+5)(4x-9) = 0$

   დ) $(x-2)(x+1)(4-x) = 0$

3. $x^2 - 8x + c = 0$ კვადრატული განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია $x = 2$. იპოვეთ $c$ მუდმივი და განტოლების მეორე ამონახსნი.

4. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციებისთვის $x$-გადაკვეთები

   ა) $f(x) = x^2 - 16$

   ბ) $f(x) = x(100 - x)$

   დ) $f(x) = x^2 - 18x + 81$

   ე) $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$

5. იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა

   ა) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$

   ბ) $f(x) = -x^2 - 4x + 1$

   გ) $f(x) = -3x^2 + 18$

   დ) $f(x) = 9 - x^2$

   ე) $f(x) = 3 - 2x^2 + 8x$

6. იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა

   ა) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

   ბ) $f(x) = 3x^2 + 9x - 1$

   გ) $f(x) = 4x^2 - 9$

   დ) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

   ე) $f(x) = 5x + x^2$

7. ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკის ესკიზები

   ა) $f(x) = 2x^2$

   ბ) $f(x) = -x^2$

   გ) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

   დ) $f(x) = 2 + x - x^2$

8. მოცემული მთლიანი ამონაგების ფუნქციისთვის იპოვეთ შესაბამისი მოთხოვნის ფუნქცია

   ა) $TR = 50Q - 4Q^2$

   ბ) $TR = 10$

9. უცხოელ ტურისტებს შორის პოპულარობით სარგებლობს წიგნი ქართული ღვინოების შესახებ. თუ მისი ფასი 15 ლარია, დღეში 50 ცალი იყიდება. თუ წიგნის ფასს 2 ლარით შევამცირებთ, მაშინ გაიყიდება 10 ცალით მეტი. იპოვეთ მაქსიმალური ამონაგების სიდიდე, თუ დამოკიდებულება ფასსა და რაოდენობას შორის წრფივია.

10. თუ ერთი სუვენირი ღირს 6 ლარი, მაშინ იყიდება 1200 ცალი. ფასის 2 ლარით გაძვირება იწვევს გაყიდული სუვენირების რაოდენობის 200 ერთეულით შემცირებას. დამოკიდებულება სუვენირის ფასსა და რაოდენობას შორის წრფივია. იპოვეთ მაქსიმალური ამონაგები. რა იქნება სუვენირის ფასი ამ შემთხვევაში?

11. თუ კინოთეატრის ბილეთი 10 ლარი ღირს, იყიდება 800 ცალი, ხოლო თუ მისი ფასი გაზდება 8 ლარი-1000 ცალი. გაყიდული ბილეთების რა რაოდენობა იძლევა მაქსიმალურ ამონაგებს და რა იქნება ამ შემთხვევაში ბილეთის ფასი, თუ დამოკიდებულება ფასსა და რაოდენობას შორის წრფივია?

12. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -2Q + 140$. ჩაწერეთ მთლიანი ამონაგები $(TR)$, როგორც $Q$ რაოდენობის ფუნქცია. იპოვეთ ის $Q_0$ რაოდენობა, რომელიც მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს მთლიანი ამონაგების ფუნქციას.

13. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $P = 6 - Q$. იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.

14. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $P = 12 - 3Q$. იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.

15. წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია 50 ლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი 58 ლარი. ჩაწერეთ საშუალო დანახარჯი $(AC)$, როგორც $Q$ რაოდენობის ფუნქცია.

16. წარმოების მუდმივი დანახარჯია 70 ლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი- 8 ლარი. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = 80 - 2Q$. გამოსახეთ მოგების ფუნქცია $Q$ რაოდენობის საშუალებით და ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

    ა) იპოვეთ საქონლის რაოდენობა, რომელიც უზრუნველყოფს ნულოვან ზღვარზე მუშაობას.

    ბ) პროდუქციის რა რაოდენობა იძლევა მაქსიმალურ მოგებას?

17. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -7Q + 150$, ხოლო მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $(TC) = 40 + 10Q$. ჩაწერეთ მოგების ფუნქცია, როგორც $Q$ რაოდენობის ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი. რა რაოდენობა უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას და როგორია ამ შემთხვევაში ფასი?

18. ფირმის ფიქსირებული დანახარჯია 5000 ლარი, ცვალებადი დანახარჯი კი-4 ლარი. პროდუქციის ერთეული იყიდება 6 ლარად.

    ა) იპოვეთ ნულოვან ზღვარზე მუშაობის რეჟიმი.

    ბ) პროდუქციის რა რაოდენობაა გამოშვებული და გაყიდული, თუ ფირმის მოგებაა 2000 ლარი?

19. მოცემულია მოთხოვნის $2Q + P = 25$ და საშუალო დანახარჯის $AC = \frac{32}{Q} + 5$ ფუნქციები. შეადგიინეთ შესაბამისი მოგების ფუნქციის განტოლება და იპოვეთ $Q$-ს ის მნიშვნელობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ნულოვან ზღვარზე მუშაობას და მაქსიმალურ მოგებას.

# ლექცია 6

# მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები. ფინანსური მათემატიკის ელემენტები

ამ ლექციაში შევისწავლით მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებს. შემოვიღებთ რიცხვის პროცენტის ცნებას. განვიხილავთ ფინანსური მათემატიკის ელემენტებს.

## 6.1 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

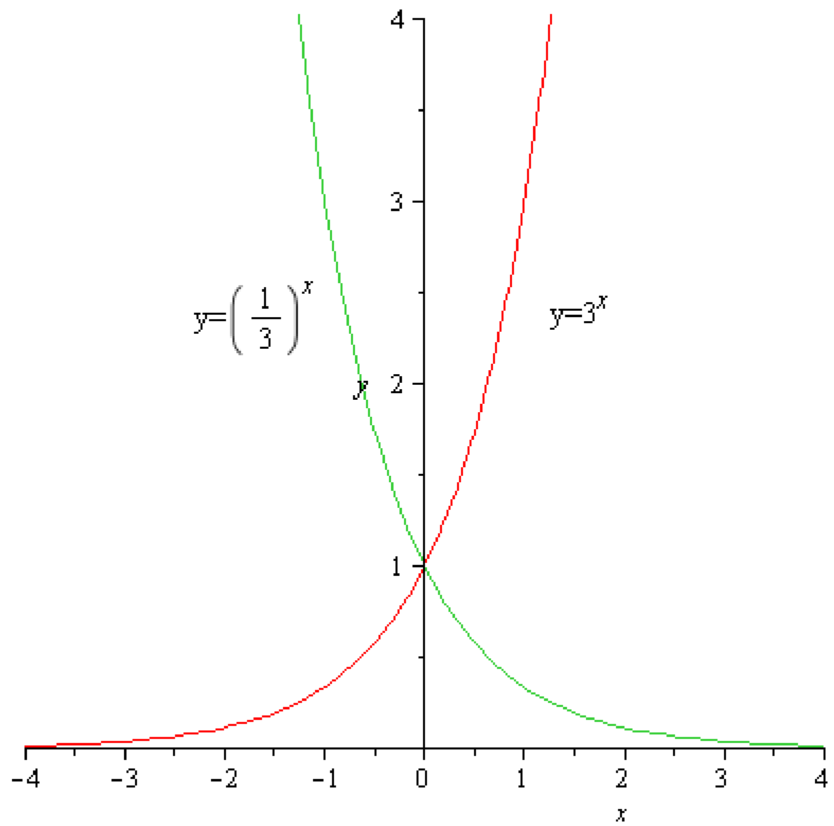
ვთქვათ, $a > 0$ და $a \neq 1$. $f(x) = a^x$ სახის ფუნქციას მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

**მაგალითი 6.1** *ვთქვათ,* $f(x) = 3^x$. *იპოვეთ*
*(ა)* $f(5)$; *(ბ)* $f\left(-\frac{2}{3}\right)$;
*(გ)* $f(\pi)$, *(დ)* $f\left(\sqrt{2}\right)$.

**ამოხსნა:**
(ა) $f(5) = 3^5 = 243$;
(ბ) $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3^{-2/3} \approx 0,4807$;
(გ) $f(\pi) = 3^\pi \approx 31,544$;
(დ) $f\left(\sqrt{2}\right) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4,7288$.

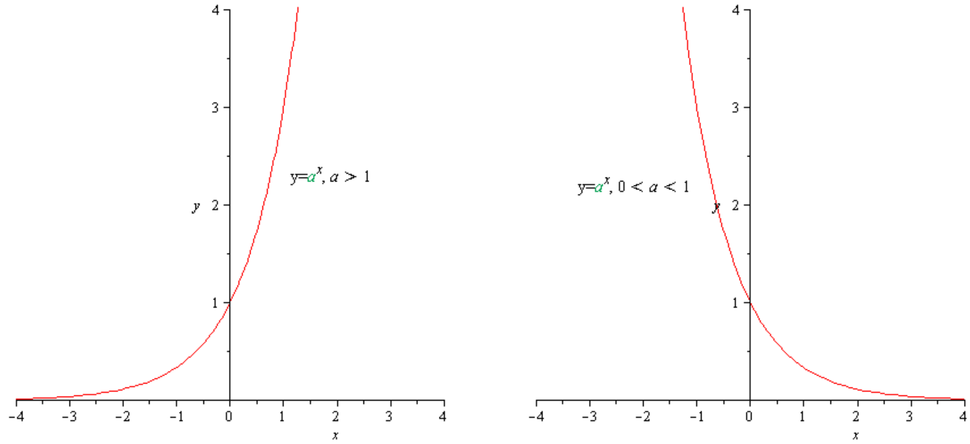
ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:
(ა) $f(x) = 3^x$; (ბ) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
**ამოხსნა:**

| $x$ | $f(x) = 3^x$ | $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ |
|---|---|---|
| $-3$ | $1/27$ | $27$ |
| $-2$ | $1/9$ | $9$ |
| $-1$ | $1/3$ | $3$ |
| $0$ | $1$ | $1$ |
| $1$ | $3$ | $1/3$ |
| $2$ | $9$ | $1/9$ |
| $3$ | $27$ | $1/27$ |




სურ 6.1

**საზოგადოდ, მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (იხ. სურათი 6.2):**




(a) (b)

სურ 6.2

განვიხილოთ გამოსახულება:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

სადაც $n$ ნატურალური რიცხვია. მივანიჭოთ $n$-ს სხვადასხვა მნიშვნელობა:

| $n$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 5 | 2, 48832 |
| 10 | 2, 59374 |
| 100 | 2, 71692 |
| 10000 | 2, 718115 |
| 100000 | 2, 71827 |
| 1000000 | 2, 71828 |

როცა $n$–ის მნიშვნელობები უსასრულოდ იზრდება, მაშინ გამოსახულება

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

“მიისწრაფის-კონკრეტული რიცხვისკენ და მას აღვნიშნავთ $e$ სიმბოლოთი, ამ რიცხვს ეილერის რიცხვს უწოდებენ. $e$ რიცხვი ირაციონალური რიცხვია, ანუ წარმოადგენს უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს. მისი მიახლოებითი მნიშვნელობაა

$$e \approx 2,72.$$

მაჩვენებლიან ფუნქციას $e$–ს ფუძით ექსპონენციალურ ფუნქციასაც უწოდებენ:

$$f(x) = e^x.$$

ვთქვათ, $a$ არის 1–სგან განსხვავებული დადებითი რიცხვი. **ლოგარითმული ფუნქცია** ფუძით $a$ განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x.$$

ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები:

1) $\log_a 1 = 0$;
2) $\log_a a = 1$;
3) $\log_a a^x = x$;
4) $a^{\log_a x} = x$.

**მაგალითი 6.2** *ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:*

$$(ა)\ f(x) = \log_2 x; \quad (ბ)\ g(x) = \log_{1/2} x.$$

***ამოხსნა:***

| $x$ | $\log_2 x$ | $\log_{1/2} x$ |
|---|---|---|
| $2^3$ | $3$ | $-3$ |
| $2^2$ | $2$ | $-2$ |
| $2$ | $1$ | $-1$ |
| $1$ | $0$ | $0$ |
| $2^{-1}$ | $-1$ | $1$ |
| $2^{-2}$ | $-2$ | $2$ |
| $2^{-3}$ | $-3$ | $3$ |
| $2^{-4}$ | $-4$ | $4$ |

*ამ მონაცემებით ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკები (იხ. სურ. 6.3)*

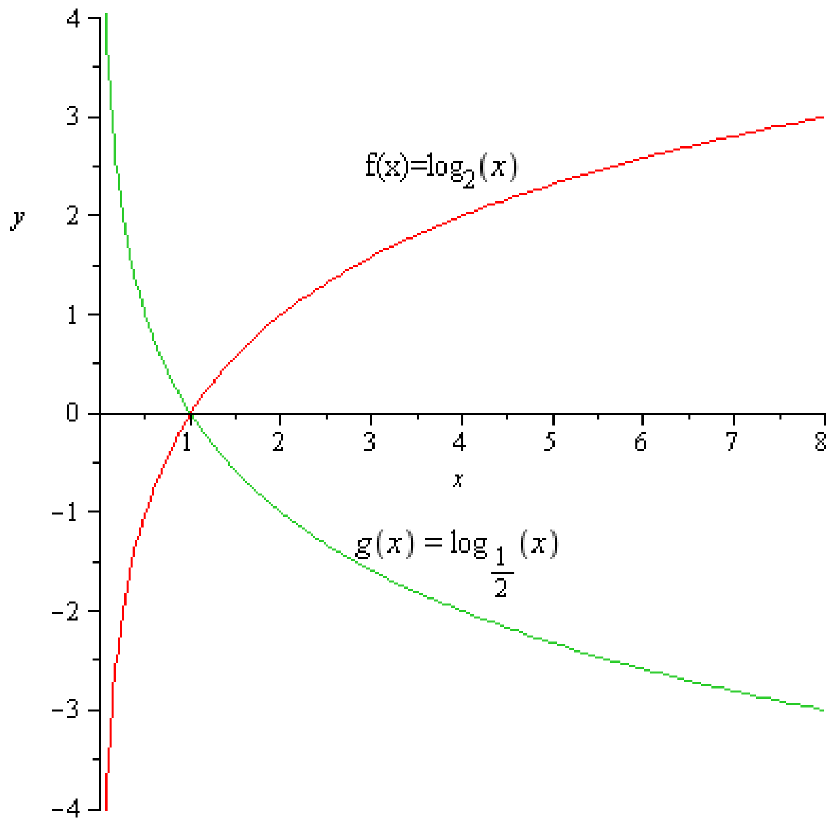
**საზოგადოდ,** $\log_a x$ **ლოგარითმულ ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (იხ. სურათი 6.4):**

როცა ლოგარითმის ფუძე 10-ის ტოლია, მაშინ მას ათობითი ლოგარითმი ეწოდება და ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\log_{10} x = \lg x.$$

ასევე, ლოგარითმულ ფუნქციას ფუძით $e$ აღვნიშნავთ $\ln x$–ით, ე. ი.

$$\log_e x = \ln x$$




სურ 6.3

**მაგალითი 6.3** *განვითარებული ქვეყნების მოსახლეობაში მაცივრის მფლობელთა პროცენტული მაჩვენებელი* $t$ *წლის შემდეგ მოდელირდება ფორმულით (იხ. სურ 6.5)*

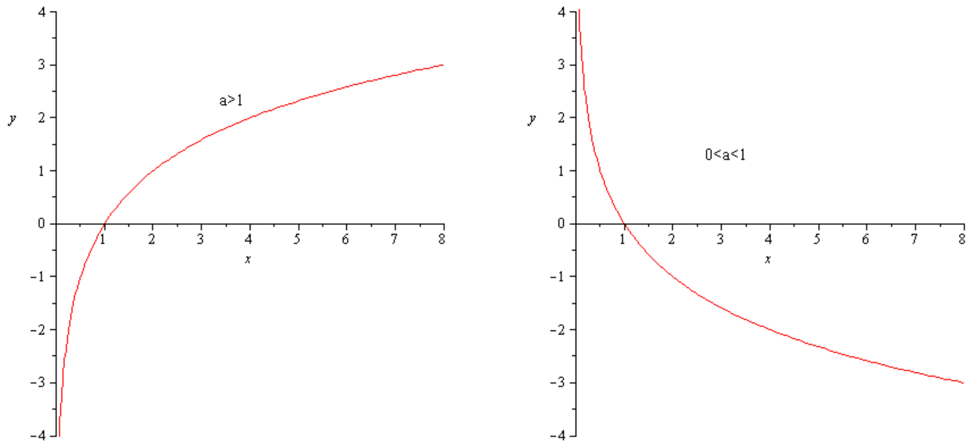
$$y = 100 - 95e^{-0{,}15t}.$$

*იპოვეთ მაცივრის მფლობელთა პროცენტული მაჩვენებელი:*

*(ა) ერთი წლის შემდეგ;*
*(ბ) 10 წლის შემდეგ;*
*(გ) 20 წლის შემდეგ.*

***ამოხსნა:***

*(ა)* $y\,(1) = 100 - 95e^{-0{,}15} = 18\%;\,;$
*(ბ)* $y\,(10) = 100 - 95e^{-1{,}5} = 79\%;$
*(გ)* $y\,(20) = 100 - 95e^{-3} = 95\%.$




(a) (b)

სურ 6.4

**მაგალითი 6.4** *თუ მთლიანი შიდა პროდუქტის (მშპ) ზრდა $t$ წლის განმავლობაში მოდელირდება ფორმულით:*

$$GNP = 80e^{0,02t},$$

*რამდენი წლის შემდეგ მიაღწევს მშპ 88 მილიარდ ლარს?*

***ამოხსნა:*** *გვაქვს*

$$88 = 80e^{0,02t},$$

$$1,1 = e^{0,02t},$$

$$0,02t = \ln 1,1 = 0,09531...,$$

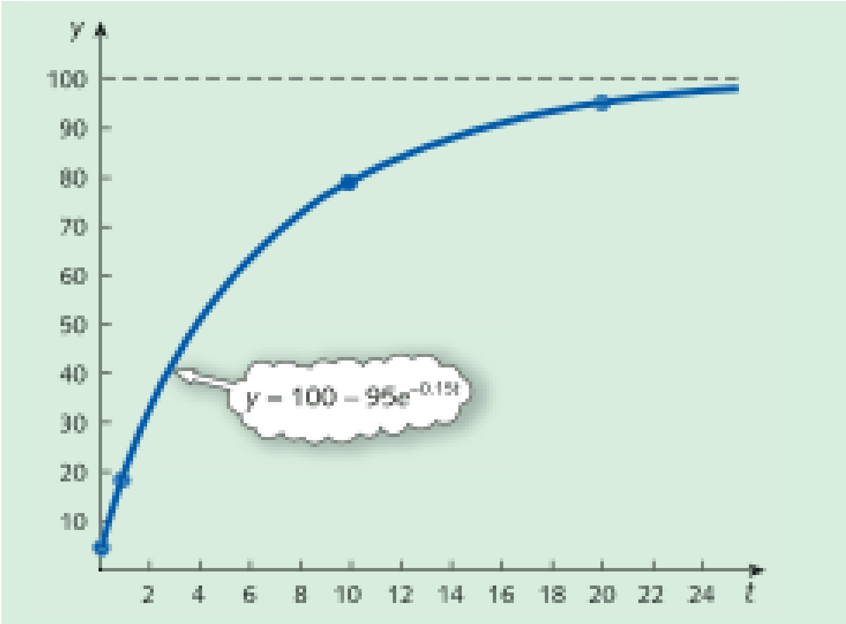
$$t = \frac{0,09531}{0,02} \approx 4,77 \text{ (წელი)}.$$

## 6.2 რიცხვის პროცენტი

**განსაზღვრება 6.1** *პროცენტი ეწოდება რიცხვის მეასედ ნაწილს და აღინიშნება სიმბოლოთი %.*

მოცემული $a$ რიცხვის $A$ პროცენტის საპოვნელად $a$ რიცხვი უნდა გავამრავლოთ $A$ პროცენტის რიცხვით მნიშვნელობაზე და შედეგი გავყოთ 100–ზე, ანუ

$$b = \frac{a \cdot A}{100}$$




სურ 6.5

ვიპოვოთ $a$, თუ ცნობილია, რომ მისი $A\%$ უდრის $b$–ს: ცხადია, რომ

$$b = \frac{a \cdot A}{100},$$

მაშასადამე,

$$a = \frac{b \cdot 100}{A}.$$

ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდების პოვნა: ამ ამოცანაში მოცემულია ორი $a$ და $b$ რიცხვი და უნდა ვიპოვოთ $a$ რიცხვის რამდენი პროცენტია $b$ რიცხვი: პროცენტის განმარტების ძალით

$$b = \frac{a \cdot x}{100}$$

და მაშასადამე

$$x = \frac{100 \cdot b}{a}.$$

## 6.3 ფინანსური მათემატიკის ელემენტები

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ვთქვათ, კრედიტორმა (მევალემ) გარკვეული დროით სესხად გასცა $S$ რაოდენობის თანხა $r\%$-ად. დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ დებიტორი (მოვალე) ვალდებულია დაუბრუნოს კრედიტორს $r\%$–ით გაზრდილი თანხა, ანუ

$$S_1 = S + \frac{rS}{100}.$$

ზოგჯერ აწარმოებენ სარგებლის მრავალჯერად დარიცხვას. დარიცხვა ხდება დროის გარკვეული ინტერვალების გასვლის შემდეგ. როგორც წესი, ეს ინტერვალები კონკრეტული სესხისათვის ერთი და იგივეა და მათ **დარიცხვის პერიოდს** უწოდებენ. დარიცხვის პერიოდი შეიძლება იყოს წელი, ნახევარი წელი, თვე და ა. შ. დადებული ხელშეკრულების თანახმად, სარგებლის განაკვეთით გათვალისწინებულ თანხას უხდიან მევალეს, ან უმატებენ ვალს. ორივე შემთხვევაში ხდება საკრედიტო ფულადი თანხის გაზრდა. ამ პროცესს საწყისი თანხის ზრდა ეწოდება. თუ ცნობილია სარგებლის დარიცხვის წესი, მაშინ დროის ნებისმიერი $t$ პერიოდისათვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ შესაბამისი თანხის რაოდენობა. ამ თანხას **მიმდინარე თანხას** უწოდებენ, იმ თანხას კი, რომელიც შეესაბამება საკრედიტო ვადის ბოლოს დაგროვილ თანხას, **საბოლოო თანხა**.

არსებობს სარგებლის დარიცხვის რამდენიმე განსხვავებული წესი. დარიცხვის ფორმებს შორის ძირითადი განსხვავება განპირობებულია იმით, თუ რომელი თანხიდან იანგარიშება სარგებლის განაკვეთი. თუ სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი $r\%$ –იანი სარგებელი იანგარიშება კრედიტის საწყისი თანხიდან, მაშინ ვამბობთ, რომ საქმე გვაქვს სარგებლის მარტივ განაკვეთთან ან კრედიტი გაცემულია მარტივი $r\%$ –იანი განაკვეთით. თუ დარიცხვის ყოველ პერიოდში დასარიცხი $r\%$ –იანი სარგებელი მიმდინარე თანხიდან იანგარიშება, მაშინ საქმე გვაქვს სარგებლის რთულ განაკვეთთან. ამ შემთხვევაში კი ვიტყვით, რომ სესხი გაცემულია სარგებლის რთული $r\%$ –იანი განაკვეთით.

გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომლითაც გამოითვლება სარგებლის მარტივი განაკვეთით დაბანდებული თანხის რაოდენობა საკრედიტო ვადის ბოლოს.

ვთქვათ, გაცემულია $S$ ლარის რაოდენობის კრედიტი $n$ პერიოდის ხანგრძლივობით. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ პერიოდში დარიცხვა ხდება მარტივი $r\%$ –იანი განაკვეთით. მაშინ, როგორც ვიცით

$$S_1 = S + \frac{rS}{100}$$

და, მაშასადამე, პირველი პერიოდის ბოლოს გვექნება $S_1$ თანხა. მეორე პერიოდის ბოლოს კი -

$$S_2 = S_1 + \frac{rS}{100} = S + 2S\frac{r}{100}$$

და ასე შემდეგ, $n$ პერიოდის ბოლოს გვექნება:

$$S_n = S_{n-1} + \frac{rS}{100} = S + nS\frac{r}{100}$$

ამგვარად მივიღეთ, ფორმულა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს მარტივი დარიცხვის შემთხვევაში გამოვთვალოთ საბოლოო თანხა

$$S_n = S\left(1 + n \cdot \frac{r}{100}\right). \tag{6.1}$$

ვთქვათ, ახლა მეანაბრემ ბანკში შეიტანა $A$ ლარი სარგებლის წლიური რთული $r\%$ განაკვეთით. გამოვთვალოთ, რა თანხა დაუგროვდება მას $n$ წლის შემდეგ: ამოცანის პირობის თანახმად, 1 წლის შემდეგ მეანაბრეს ანგარიშზე ექნება შემდეგი თანხა

$$A_1 = A + A \cdot \frac{r}{100} = A\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

2 წლის შემდეგ კი–

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + A_1 \cdot \frac{r}{100} \\ &= A_1\left(1+\frac{r}{100}\right) \\ &= A\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \end{aligned}$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ, რომ $n$ წლის შემდეგ მეანაბრეს ანგარიშზე ექნება შემდეგი თანხა

$$A_n = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n. \tag{6.2}$$

ამ ფორმულას ეწოდება დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის წლიური რთული განაკვეთის შემთხვევაში. $A$ თანხას ეწოდება საწყისი თანხა, ხოლო $A_n$ თანხას საბოლოო თანხა.

**მაგალითი 6.5** $10000$ *ლარი გაცემულია სესხად სარგებლის წლიური რთული* $10\%$*–იანი განაკვეთით. იპოვეთ საბოლოო თანხა 5 წლის შემდეგ. (6.2) ფორმულის თანახმად*

$$\begin{aligned} A_5 &= 10000\left(1+\frac{10}{100}\right)^5 \\ &= 10000 \cdot 1.61051 \\ &= 16105,1. \end{aligned}$$

განვიხილოთ იგივე ამოცანა მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში:

**მაგალითი 6.6** $10000$ *ლარი გაცემულია სესხად სარგებლის წლიური მარტივი* $10\%$*–იანი განაკვეთით. იპოვეთ საბოლოო თანხა 5 წლის შემდეგ. (6.1) ფორმულის თანახმად*

$$\begin{aligned} S_5 &= 10000\left(1+\frac{5\cdot 10}{100}\right) \\ &= 10000 \cdot 1,5 \\ &= 15000 \end{aligned}$$

**მაგალითი 6.7** *ერთი ბანკი სთავაზობს მეანაბრეებს ერთი წლის განმავლობაში სარგებლის რთულ თვიურ* $2\%$*-იან დარიცხვას, ხოლო მეორე ბანკი– სარგებლის*

*მარტივ თვიურ $2,1\%$–იან დარიცხვას. რომელ ბანკში უფრო ხელსაყრელია მეანაბრისთვის ფულის შეტანა?*

*ცხადია, ამ შემთხვევაში დარიცხვის პერიოდი $n = 12$. რთული პროცენტის შემთხვევაში ფორმულა (6.2)–დან მივიღებთ*

$$\begin{aligned} A_{12} &= 10000\left(1+\frac{2}{100}\right)^{12} \\ &\approx 12682. \end{aligned}$$

*მარტივი პროცენტის შემთხვევაში ფორმულა (6.1)–დან მივიღებთ:*

$$\begin{aligned} S_{12} &= 10000\left(1+\frac{2.1\cdot 12}{100}\right) \\ &= 12520. \end{aligned}$$

*როგორც ვხედავთ $A_{12} > S_{12}$. მაშასადამე, მეანაბრისთვის უფრო ხელსაყრელია პირველ ბანკში თანხის შეტანა.*

## 6.4 სავარჯიშოები:

1. $t$ წლის შემდეგ მოსახლეობაში ვიდეოკამერის მფლობელთა პროცენტული მაჩვენებელი მოდელირდება ფორმულით

$$y = \frac{55}{1+800e^{-0,3t}}.$$

   იპოვეთ ვიდეოკამერის მფლობელთა პროცენტული მაჩვენებელი

   (ა) 10 წლის შემდეგ;
   (ბ) 20 წლის შემდეგ;
   (გ) 30 წლის შემდეგ.

2. ფირმის შემოსავალი (TR) $t$ წლის შემდეგ მოდელირდება ფორმულით (შემოსავალი გამოსახულია მილიონებში):

$$TR = 5e^{-0,15t}.$$

   იპოვეთ:

   (ა) მიმდინარე შემოსავალი;
   (ბ) რამდენი წლის შემდეგ გახდება ფირმის შემოსავალი 2,7 მილიონი ლარი?

3. იპოვეთ რიცხვი, თუ მისი:

   ა) $1\%$ არის $12$ ,   ბ) $10\%$ არის $23,7$
   გ) $18\%$ შეადგენს 48-ს   დ) $2,6\%$ შეადგენს 6,5-ს.

4. ფირმამ წლიური გაყიდვების მოცულობა წინა წელთან შედარებით გაზარდა 50 000– დან 55 000– მდე. გამოსახეთ ეს ზრდა პროცენტობით.

5. ვთქვათ, საშემოსავლო გადასახადი შეადგენს $20\%$-ს. რამდენი ლარით დაიბეგრება მოსამსახურე, თუ მისი დარიცხული ხელფასი შეადგენს 1360 ლარს.

6. ინფლაციის წლიური მაჩვენებელი შეადგენს $4\%$–ს. რა ეღირება საქონელი წლის ბოლოს, თუ წლის დასაწყისში მისი ფასი იყო 25 ლარი.

7. პროდუქტზე დამატებითი ღირებულების გადასახადი(დღგ) შეადგენს $18\%$–ს. თუ პროდუქტის სარეალიზაციო ფასია 800 ლარი, რა ეღირება ეს პროდუქტი დ.ღ.გ.–ს გარეშე?

8. ავტომანქანის ფასი წლის განმავლობაში შემცირდა ორჯერ: პირველად $5\%$-ით, ხოლო შემდეგ $9\%$-ით. საბოლოოდ რამდენი პროცენტით შემცირდა ავტომანქანის ფასი?

9. საერთაშორისო ბაზარზე ერთი ბარელი ნავთობის ფასი შეიცვალა ორჯერ: პირველად გაიზარდა $7\%$-ით, ხოლო შემდეგ დაიკლო $11\%$-ით. საბოლოოდ რამდენი პროცენტით შეიცვალა ნავთობის ფასი?

10. ტურისტულ ფირმას დაგეგმილი ჰქონდა ზაფხულის სეზონის განმავლობაში მომსახურებოდა $800$ ტურისტს. ფირმამ გეგმა შეასრულა $110\%$-ით. რამდენ ტურისტს მომსახურებია ფირმა?

11. მარტვილის კანიონზე ვიზიტორთა რაოდენობა ერთ წელიწადში 24 000 -დან გაიზარდა 36 000-მდე. გამოსახეთ ეს ზრდა პროცენტობით.

12. რესტორანში შესვლისათვის თითო კაცზე ფიქსირებული გადასახადია $20$ ლარი. მომსახურებისთვის გადასახადი კი შეადგენს დანახარჯის $9\%$-ს. ხუთმა მეგობარმა გადაწყვიტა ივახშმოს რესტორანში. რა თანხა შეუძლიათ დახარჯონ მეგობრებმა სავახშმოდ, თუ მათ აქვთ მხოლოდ 500 ლარი?

13. ტურისტული სააგენტოს მიერ ერთი ტურისტის მომსახურების ფასი პირველად გაიზარდა $6\%$-ით, ხოლო შემდეგ შემცირდა $9\%$-ით. საბოლოოდ რამდენი პროცენტით შეიცვალა მომსახურების ფასი?

14. 12 000 ლარი დაბანდებულია 6 წლით წლიური რთული $7\%$-იანი განაკვეთით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა.

15. 14 000 ლარი გაცემულია სესხად 12 წლით წლიური რთული $8\%$-იანი განაკვეთით. იპოვეთ დასაბრუნებელი თანხის რაოდენობა.

16. მეანაბრემ ბანკში დააბანდა 16 000 ლარი 8 წლით სარგებლის წლიური მარტივი $12\%$-იანი განაკვეთით. რა თანხას დაუბრუნებს ბანკი მეანაბრეს?

17. რა რაოდენობის კრედიტი აიღო მოვალემ, თუ კრედიტი გაცემული იყო 15 წლით სარგებლის მარტივი წლიური 8$\%$-იანი განაკვეთით და ვადის გასვლის შემდეგ მან დააბრუნა 83 000 ლარი?

18. სარგებლის მარტივი წლიური საპროცენტო განაკვეთით დაბანდებული 11 000 ლარი 6 წლის შემდეგ გახდა 15 620 ლარი. იპოვეთ სარგებლის განაკვეთი.

19. რა თანხა დაუბანდებიათ ბანკში სარგებლის წლიური რთული 5%-იანი განაკვეთით, თუ 6 წლის შემდეგ დაგროვილმა თანხამ შეადგინა 12 500 ლარი.

20. 25 000 ლარი დაბანდებულია სესხად სარგებლის წლიური რთული 12%-იანი განაკვეთით. რამდენი წლის შემდეგ გახდება ეს თანხა 250 000 ლარის ტოლი?

21. გამოთვალეთ, რა თანხა უნდა შეიტანოთ ბანკში სარგებლის წლიური რთული 5%-იანი განაკვეთით, რომ 7 წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა შეადგენდეს 32 500 ლარს?

22. იპოვეთ სარგებლის წლიური რთული 10%-იანი განაკვეთის შესაბამისი მარტივი განაკვეთი იმ პირობით, რომ ერთი და იმავე საწყისი თანხიდან 5 წელიწადში დაგროვილი თანხები იყოს ტოლი.

23. ერთი ბანკი სთავაზობს კლიენტებს ერთი წლის განმავლობაში ანაბრებზე სარგებლის ყოველთვიურ რთულ 3%-იან დარიცხვას, ხოლო მეორე ბანკი სარგებლის მარტივ ყოველთვიურ 3.1%-იან დარიცხვას. რომელ ბანკში უფრო ხელსაყრელია თანხის შეტანა?

# ლექცია 7

# მატრიცები და დეტერმინანტები. წრფივ განტოლებათა სისტემები

ამ ლექციაში შემოვიღებთ მატრიცისა და დეტერმინანტის ცნებებს. განვიხილავთ ოპერაციებს მატრიცებზე. გავეცნობით დეტერმინანტის საშუალებით წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდეს.

## 7.1 მატრიცის ცნება

ვთქვათ, ფირმა ამზადებს სამი სახის პროდუქტს $G1$, $G2$ და $G3$, რომელსაც ჰყიდის ორ- $C1$ და $C2$ მომხმარებელზე. თვის განმავლობაში $C1$ მომხმარებელი ყიდულობს $G1$ პროდუქტის 7 ერთეულს, $G2$ პროდუქტის 3 ერთეულს და $G3$ პროდუქტის 4 ერთეულს, ხოლო $C2$ მომხმარებელი ყიდულობს შესაბამისად $G1$-ის 1, $G2$-ის 5 და $G3$-ის 6 ერთეულს. ცხადია, რომ ეს მოცულობითი ინფორმაცია უმჯობესია ჩაიწეროს მოკლედ შემდეგი ცხრილის სახით

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

რომელსაც მატრიცა ეწოდება. საზოგადოდ,

> ფრჩხილებში ჩაწერილ რიცხვთა მართკუთხა ცხრილს მატრიცა ეწოდება.

რიცხვებს, რომლისგანაც მატრიცა შედგება, მატრიცის ელემენტები ეწოდებათ. მატრიცა შედგება სტრიქონებისა და სვეტებისაგან. (7.1) მატრიცა შედგება 2 სტრიქონისა და 3 სვეტისგან, ამიტომ ვიტყვით, რომ მას აქვს $2\times3$ რიგი. $m\times n$ რიგის მატრიცას გააჩნია $m$ სტრიქონი და $n$ სვეტი. ცხადია, გონივრული იქნება, თუ მატრიცის ელემენტების გადასანომრად გამოვიყენებთ ორმაგ ინდექსებს. კერძოდ, ჩანაწერი $a_{ij}$ ნიშნავს, რომ $a$ ელემენტი წარმოადგენს მატრიცის $i$ ნომრიანი სტრიქონისა და $j$ ნომრიანი სვეტის საერთო ელემენტს, ანუ მდებარეობს მათ გადაკვეთაზე. (7.1) მატრიცაში $a_{12} = 3$.

საზოგადოდ, $3 \times 2$ რიგის $D$ მატრიცა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}$$

ანალოგიურად, $3 \times 3$ რიგის $E$ მატრიცას ექნება შემდეგი სახე

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

$E$ მატრიცას მე-3 რიგის **კვადრატული** მატრიცა ეწოდება.

კვადრატულ მატრიცაში დიაგონალს, რომელზეც ერთნაირინდექსიანი $a_{ii}$ ელემენტები დგანან, მატრიცის **მთავარი დიაგონალი** ეწოდება, ხოლო მეორე დიაგონალს არამთავარი დიაგონალი.

**მაგალითი 7.1** *მოცემულია მატრიცები*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

*მიუთითეთ $B$ და $C$ მატრიცის რიგები და ამოწერეთ $b_{22}$ და $c_{34}$ ელემენტების მნიშვნელობები.*

***ამოხსნა.*** *$B$ მატრიცის რიგია $2 \times 2$, ვინაიდან ის შედგება 2 სტრიქონისა და ორი სვეტისგან, ხოლო $C$ მატრიცა $3 \times 4$ რიგისაა, რადგანაც მასში სამი სტრიქონი და ოთხი სვეტია.*

*$b_{22} = 6$ ($B$ მატრიცის სტრიქონი 2 და სვეტი 2), $c_{34} = 7$ ($C$ მატრიცის სტრიქონი 3 და სვეტი 4)*

## 7.2 მატრიცის ტრანსპონირება

ზემოთ მოყვანილ $A$ მატრიცაში სტრიქონები შეესაბამებოდა ორ მომხმარებელს, ხოლო სვეტები სამ პროდუქტს და მატრიცა გამოსახავდა თვეში ორი მომხმარებლის მიერ სამი პროდუქტის შეძენის დინამიკას. ეს ინფორმაცია შეიძლება ასევე გადმოიცეს, როგორც სამი პროდუქტის შეძენის დინამიკა ორი მომხმარებლის მიერ. ცხადია, ასეთ შემთხვევაში ამ პროცესის აღმწერ მატრიცას ექნება სახე

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

სადაც სტრიქონები შეესაბამება პროდუქტებს, ხოლო სვეტები მომხმარებლებს. $B$ მატრიცის მეორე სტრიქონში არსებული რიცხვები გამოსახავენ,რომ $G2$ პროდუქტის 3 და 5 ერთეულებს ყიდულობენ შესაბამისად $C1$ და $C2$ მომხმარებლები. მიღებულ $B$ მატრიცას $A$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა ეწოდება და აღინიშნება ასე

$$B = A^T.$$

მაშასადამე, თუ $A$ მატრიცის სტრიქონებს ჩავწერთ შესაბამის სვეტებად(ანუ, პირველ სტრიქონს პირველ სვეტად, მეორე სტრიქონს -მეორე სვეტად და ა.შ.), მივიღებთ მატრიცას, რომელსაც $A$ მატრიცის **ტრანსპონირებული მატრიცა** ეწოდება და აღინიშნება $A^T$ სიმბოლოთი. ცხადია, თუ $A$ მატრიცის რიგია $m \times n$, მაშინ მისი ტრანსპონირებული მატრიცის რიგი იქნება $n \times m$.

**მაგალითი 7.2** *ჩაწერეთ შემდეგი მატრიცების ტრანსპონირებული მატრიცები*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

***ამოხსნა.*** *ვინაიდან $D$ მატრიცა $3 \times 4$ რიგისაა, ამიტომ მისი ტრანსპონირებული მატრიცა $4 \times 3$ რიგის იქნება,*

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*ხოლო $2 \times 1$ რიგის $E$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა იქნება $1 \times 2$ რიგის,*

$$E^T = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

მატრიცას ეწოდება **სტრიქონ-მატრიცა**, თუ ის მხოლოდ ერთი სტრიქონისგან შედგება, მაგალითად

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

და ეწოდება **სვეტ-მატრიცა**, თუ ის მხოლოდ ერთი სვეტისაგან შედგება, მაგალითად

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

.

## 7.3 მატრიცების შეკრება და გამოკლება

ვთქვათ, ამ პარაგრაფის დასაწყისში განხილულ ორი მომხმარებლისა და სამი პროდუქტის მაგალითში

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

მატრიცა გამოსახავს შესყიდვების დინამიკას იანვარში. ანალოგიურად დავუშვათ, რომ თებერვლის თვის შესყიდვების დინამიკა მოიცემა შემდეგი მატრიცით

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $C1$ მომხმარებელმა იანვარსა და თებერვალში შეიძინა, შესაბამისად, 7 და 6 ერთეული $G1$ პროდუქტი. მაშასადამე, მან ორი თვის განმავლობაში ჯამში შეიძინა $7+6=13$ ერთეული $G1$ პროდუქტი. თუ ანალოგიურ პროცესს გამოვიყენებთ დანარჩენი მომხმარებლისა და პროდუქტების მიმართ, მაშინ ორი თვის ჯამური გაყიდვების დინამიკა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი მატრიცის სახით

$$C = \begin{pmatrix} 7+6 & 3+2 & 4+1 \\ 1+0 & 5+4 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 5 \\ 1 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $C$ მატრიცა წარმოადგენს $A$ და $B$ მატრიცების ჯამს და ეს ფაქტი ჩაიწერება ასე

$$C = A + B$$

საზოგადოდ, იმისათვის რომ შევკრიბოთ(ან გამოვაკლოთ) ორი ერთნაირი რიგის მატრიცა, საჭიროა ერთმანეთს დავუმატოთ(ან გამოვაკლოთ) ამ მატრიცების შესაბამისი ელემენტები. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ორი $m \times n$ რიგის მატრიცისთვის სამართლიანია ტოლობა

$$A + B = B + A$$

**მაგალითი 7.3** *მოცემულია მატრიცები*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

*იპოვეთ : 1) $A+B$, 2) $A-B$, 3) $A-A$*

***ამოხსნა.***

*1)* $A+B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

*2)* $A-B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

*3)* $A-A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

*ბოლოს მიღებულ $3 \times 2$ რიგის* ***მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, ნულოვანი მატრიცა ეწოდება.***

ნულოვანი მატრიცის მაგალითებია

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0) \; .$$

ნულოვანი მატრიცები $O$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

## 7.4 მატრიცის რიცხვზე გამრავლება

კვლავ დავუბრუნდეთ ჩვენს მაგალითს ორი მომხმარებლისა და სამი პროდუქტის შესახებ. ვთქვათ, $C1$ მომხმარებელი ყიდულობს 7 ერთეულ $G1$ პროდუქტს ყოველთვიურად. მაშინ ის წლის განმავლობაში შეიძენს $12 \times 7 = 84$ $G1$ პროდუქტს. ანალოგიურად, თუ ამ პროცესს განვავრცობთ დანარჩენ მომხმარებელსა და პროდუქტებზე, მივიღებთ მომხმარებლების მიერ წლიური შესყიდვების დინამიკის ამსახველ მატრიცას.

$$B = \begin{pmatrix} 12 \times 7 & 12 \times 3 & 12 \times 4 \\ 12 \times 1 & 12 \times 5 & 12 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 36 & 48 \\ 12 & 60 & 72 \end{pmatrix}$$

ამრიგად, $B$ მატრიცა მიიღება $A$ მატრიცის ყოველი ელემენტის 12-ზე გამრავლებით, რაც ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$B = 12A$$

საზოგადოდ, იმისათვის რომ $A$ მატრიცა გავამრავლოთ $k$ რიცხვზე, საჭიროა მისი ყოველი ელემენტი გავამრავლოთ ამ $k$ რიცხვზე.

**მაგალითი 7.4** *მოცემულია მატრიცა*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

*იპოვეთ 1) $2A$, 2) $-A$ , 3) $0A$*

***ამოხსნა.***

*1.*

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix};$$

*2.*

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix};$$

*3.*

$$0 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 7.5 მატრიცების ნამრავლი

პირველ რიგში განვიხილოთ, თუ როგორ უნდა გავამრავლოთ სტრიქონ-მატრიცა სვეტ-მატრიცაზე. ამის საილუსტრაციოდ, დავუშვათ, რომ სამი სხვადასხვა სახის $G1, G2, G3$ პროდუქტის ერთეული ღირს შესაბამისად 50,30 და 20 ლარი. შემოვიღოთ სტრიქონ-მატრიცა

$$P = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 \end{pmatrix}$$

თუ ფირმამ გაყიდა თითოეული პროდუქტის 100, 200, 175 ერთეული შესაბამისად, მაშინ ეს ინფორმაცია შეგვიძლია ჩავწეროთ სვეტ-მატრიცის სახით

$$Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 175 \end{pmatrix}$$

$G1$ პროდუქტის რეალიზაციით მიღებული მთლიანი შემოსავალის დასათვლელად ერთეული პროდუქტის ფასი 50 ლარი უნდა გავამრავლოთ გაყიდული პროდუქტის რაოდენობაზე- 100-ზე: მივიღებთ $50 \times 100 = 5000$ლ. ანალოგიურად, $G2$ და $G3$ პროდუქტების რეალიზაციით მიღებული თანხა ტოლი იქნება : $30 \times 200 = 6000$ლ და $20 \times 175 = 3500$. მაშასადამე, ფირმის მთლიანი შემოსავალი ლარებში ტოლი იქნება

$$TR = 5000 + 6000 + 3500 = 14500$$

$TR$-ის ეს მნიშვნელობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც $1 \times 1$ რიგის მატრიცა, ანუ $(14500)$. ფაქტიურად, ეს მატრიცა მიღებულია ფასის $P$ სტრიქონ-მატრიცისა და რაოდენობის $Q$ სვეტ-მატრიცის ერთმანეთზე გადამრავლების შედეგად.

$$\begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 175 \end{pmatrix} = (14500)$$

14 500 მიიღება $P$ და $Q$ მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ერთმანეთზე გადამრავლებით და შეკრებით.

საზოგადოდ, თუ $A$ არის სტრიქონ-მატრიცა

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1s} \end{pmatrix}$$

და $B$ არის სვეტ-მატრიცა

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ ... \\ b_{s1} \end{pmatrix}$$

მაშინ მათი გამრავლების შედეგად მიღებული $1 \times 1$ რიგის მატრიცა გამოითვლება შემდეგნაირად

$$A \times B = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + ... + a_{1s}b_{s1}) \tag{7.4}$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ სტრიქონ-მატრიცის სვეტ-მატრიცაზე გამრავლება შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა მათში ელემენტების ერთნაირი რაოდენობაა, ანუ, სტრიქონ-მატრიცაში სვეტების რაოდენობა ემთხვევა სვეტ-მატრიცის სტრიქონების რაოდენობას.

**მაგალითი 7.5** *მოცემულია მატრიცები*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*იპოვეთ* $AB$.

***ამოხსნა.*** *(7.4) ფორმულიდან მივიღებთ:*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3(-1) + 4 \cdot 0) = (9).$$

ზოგადად მატრიცების ნამრავლი განიმარტება შემდეგნაირად: **თუ $A$ არის $m \times s$ რიგის მატრიცა, ხოლო $B$ არის $s \times n$ რიგის მატრიცა, მაშინ $C = AB$ მატრიცა იქნება $m \times n$ რიგის და მისი ყოველი $c_{ij}$ ელემენტი მიიღება $A$ მატრიცის $i$-ური სტრიქონის $B$ მატრიცის $j$-ურ სვეტზე გამრავლების შედეგად.**

**მაგალითი 7.6** *გადავამრავლოთ* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ *და* $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *მატრიცები. მატრიცთა ნამრავლის განმარტების ძალით მივიღებთ*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11}{=}3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & c_{12}{=}3 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \\ c_{21}{=}-2 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 & c_{22}{=}-2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ გამრავლების ოპერაცია მატრიცთა სიმრავლეში არაკომუტაციურია, ე.ი. საზოგადოდ $AB \neq BA$.

## 7.6 დეტერმინანტები

ყოველ $n$-ური რიგის კვადრატულ $A$ მატრიცას გარკვეული წესით შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ამ მატრიცის **დეტერმინანტი** ეწოდება და აღინიშნება $|A|$ ან $detA$ სიმბოლოებით.

თუ $n = 1$, მაშინ $A = (a_{ij})_{1\times1}$ მატრიცა შედგება ერთი $a_{11}$ ელემენტისაგან და მისი შესაბამისი პირველი რიგის დეტერმინანტი თვით ამ რიცხვს ეწოდება

$$|A| = a_{11}$$

თუ $n = 2$, მაშინ $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი გამოითვლება შემდეგნაირად

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**მაგალითი 7.7** *გამოვთვალოთ დეტერმინანტები:*

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = -13$$

$$\begin{vmatrix} a & 5 \\ -b & 7 \end{vmatrix} = a \cdot 7 - 5 \cdot (-b) = 7a + 5b$$

თუ $n = 3$, მაშინ $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის გამოთვლის ერთ-ერთი წესი მდგომარეობს შემდეგში: მივუწეროთ დეტერმინანტს მეოთხე და მეხუთე სტრიქონად თავისივე პირველი და მეორე სტრიქონი. გავამრავლოთ მთავარი დიაგონალის ელემენტები, მივუმატოთ ამ ნამრავლს დიაგონალის ქვემოთ მის ორ პარალელურ ხაზზე მდებარე სამ-სამი ელემენტის ნამრავლთა ჯამი და შემდეგ იგივე სახის ქმედება განვახორციელოთ არამთავარი დიაგონალის მიმართაც იმ განსხვავებით, რომ ამ შემთხვევაში სამივე შესაკრებს ვიღებთ უარყოფითი ნიშნით. საბოლოოდ, ასე მიღებული ექვსივე შესაკრების ჯამი წარმოადგენს მესამე რიგის მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტს.

დეტერმინანტის გამოთვლის ეს წესი ცნობილია **სარუსის წესის** სახელწოდებით.

**მაგალითი 7.8** *გამოვთვალოთ დეტერმინანტი*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

*მივუწეროთ დეტერმინანტს ქვემოდან მისი პირველი და მეორე სტრიქონი და გამოვთვალოთ ექვსი შესაკრები*

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ = \; & 1 \cdot 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 \cdot 1 \\ & +(-1) \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot (-1) \\ & -4 \cdot 5 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot (-2) \\ = \; & -35 \end{aligned}$$

## 7.7 წრფივ განტოლებათა სისტემები. კრამერის ფორმულები

განვიხილოთ ორუცნობიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right. \tag{7.5}$$

აქ $x_1$ და $x_2$ უცნობებია, $a_{ij}$ მოცემული რიცხვებია და მათ კოეფიციენტები ეწოდებათ, ხოლო მოცემულ $b_1$ და $b_2$ რიცხვებს თავისუფალი წევრები ეწოდებათ. (7.5) სისტემის ამოსახსნელად სისტემის კოეფიციენტებისგან ავაგოთ მეორე რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$\Delta$ დეტერმინანტს სისტემის მთავარი დეტერმინანტი ეწოდება. თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ (7.5) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_1 = \tfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \tfrac{\Delta_2}{\Delta} \tag{7.6}$$

ამ ფორმულებში $\Delta$ წარმოადგენს სისტემის მთავარ დეტერმინანტს, ხოლო $\Delta_1$ წარმოადგენს დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება $\Delta$ დეტერმინანტისაგან მასში პირველი სვეტის ამოშლით და მის ნაცვლად სისტემის თავისუფალი $b_1, b_2$ წევრების ჩასმით. ანალოგიურად, $\Delta_2$ დეტერმინანტი მიიღება $\Delta$-სგან მასში მეორე სვეტის შეცვლით $b_1, b_2$ თავისუფალი წევრებით.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

(7.6) ფორმულებს **კრამერის** ფორმულები ეწოდება.

**მაგალითი 7.9** *კრამერის ფორმულების გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი სისტემა*

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 3x_1 - 5x_2 = -9 \end{array}\right. \tag{7.7}$$

***ამოხსნა.*** *პირველად ვიპოვოთ სისტემის მთავარი დეტერმინანტი*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 4 \cdot (3) = -22$$

*ვინაიდან $\Delta \neq 0$, ამიტომ სისტემა ამოხსნადია. ვიპოვოთ $\Delta_1$ და $\Delta_2$.*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ -9 & -5 \end{vmatrix} = -80 + 36 = -44$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -18 - 48 = -66$$

*(7.6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ (7.7) სისტემის ამონახსნებს:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-66}{-22} = 3.$$

კრამერის (7.6) ფორმულები ანალოგიურად გამოიყენება სამუცნობიანი სისტემის შემთხვევაშიც.

**მაგალითი 7.10** *ამოხსენით სისტემა კრამერის ფორმულებით*

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases} \tag{7.8}$$

***ამოხსნა.*** *გამოვთვალოთ სისტემის მთავარი დეტერმინანტი*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 26$$

*ვინაიდან $\Delta \neq 0$, ამიტომ სისტემა ამოხსნადია. ვიპოვოთ $\Delta_1$, $\Delta_2$ და $\Delta_3$.*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 26$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 26$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 26$$

*ამრიგად, (7.8) სისტემის ამონახსნებია*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1$$

## 7.8 სავარჯიშოები:

1. მოცემულია $A$ მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & -8 & 9 \\ 12 & -9 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

ამოწერეთ $A$ მატრიცის შემდეგი ელემენტები: $a_{12}; a_{24}; a_{14}; a_{32}; a_{24}; a_{34}$.

2. ჩაწერეთ $B=(b_{ij})_{3\times 2}$ მატრიცა, რომლის ზოგადი ელემენტია:

$$1)b_{ij}=5 \quad 2)b_{ij}=i \quad 3)b_{ij}=i\cdot j$$
$$4)b_{ij}=\min(i,j) \quad 5)b_{ij}=\frac{i}{j}$$

3. მოცემულია მატრიცები

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

იპოვეთ:

$$1)A+B \quad 2)A-3B \quad 3)A^T+C \quad 4)2B^T+3C \quad 5)A-4C^T$$

4. იპოვეთ $a$, $b$ და $c$, თუ

$$1)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b-2 & 6c \\ 3 & 7 \end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix} a & 9 \\ -3 & 2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+b & 9 \\ b & 2 \\ 6 & c+b \end{pmatrix}$$

5. იპოვეთ $C=-3A^T+B$ მატრიცის უდიდესი და უმცირესი ელემენტების სხვაობის მოდული, თუ $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

6. იპოვეთ მატრიცათა ნამრავლი:

$$1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix};$$
$$3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix};\qquad 4)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

7. $A$ და $B$ მატრიცებისთვის შეამოწმეთ $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$ ტოლობის მართებულობა:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. $A$ და $B$ მატრიცებისთვის განსაზღვრულია როგორც $AB$, ასევე $BA$ ნამრავლი. თუ $A$ არის $3\times 5$ რიგის მატრიცა, მაშინ რა უნდა იყოს $B$ მატრიცის განზომილება?

9. $A$, $B$ და $C$ მატრიცებისთვის შეამოწმეთ $A(B+C)=AB+AC$ ტოლობის სამართლიანობა, თუ

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. საპრეზიდენტო არჩევნებში მონაწილეობს სამი კანდიდატი. წინასაარჩევნო კომპანიისთვის თითოეული კანდიდატი იყენებს პლაკატებს, სარეკლამო რგოლებსა და საინფორმაციო ბუკლეტებს. **პირველი კანდიდატი** უკვეთავს 10 000 პლაკატს, 2 სთ. სარეკლამო ეთერს, 20 000 ბუკლეტს; **მეორე კანდიდატი-** 12 000 პლაკატს, 1,5 სთ სარეკლამო ეთერს, 24 000 ბუკლეტს, ხოლო **მესამე**-16 000 პლაკატს, 1,5 სთ ეთერს და 15 000 ბუკლეტს. 1 ცალი პლაკატის ღირებულებაა 3 ლარი, 1 წთ სარეკლამო ეთერის- 100 ლარი, ხოლო 1 ცალი ბუკლეტის 1,5 ლარი. რა თანხაა საჭირო თითოეული კანდიდატის კამპანიის ჩასატარებლად? (ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენეთ მატრიცული სიმბოლიკა)

11. ორმა ტურისტმა მაღაზიაში შეიძინა სამი დასახელების პროდუქტი: შაქარი, ყველი და კარაქი. პირველმა შეიძინა 1 კგ. შაქარი, 2კგ. ყველი და 1 კგ. კარაქი. მეორემ კი- 2კგ. შაქარი, 3 კგ. ყველი და 2კგ. კარაქი. განსაზღვრეთ თითოეული ტურისტის დანაზარჯი , თუ 1კგ. შაქარი ღირს 1 ლარი, 1 კგ. ყველი- 3 ლარი, ხოლო 1 კგ. კარაქი- 5 ლარი. (ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენეთ მატრიცული სიმბოლიკა).

12. გამოთვალეთ დეტერმინანტი:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}; \quad 3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$4)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}; 5)\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; 6)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

13. ამოხსენით განტოლება:

$$1)\begin{vmatrix} x+6 & 4 \\ x & 7 \end{vmatrix}=0; \quad 2)\begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}=7$$

14. იპოვეთ $|x_1 \cdot x_2|$, თუ $x_1$ და $x_2$ არის შემდეგი განტოლების ფესვები:

$$\begin{vmatrix} 2x & -1 & 2x \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix}=10$$

15. კრამერის წესის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

$$1)\begin{cases} 2x_1+x_2 &= 5 \\ 3x_1-2x_2 &= 4 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 3x_1-7x_2 &= -11 \\ 2x_1+5x_2 &= 12 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1+x_2-x_3 &= -1 \\ 2x_1-x_2+x_3 &= 2 \\ x_1+x_2+x_3 &= 3 \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 3 \\ 4x_1+3x_3 &= 15 \\ 5x_2-x_3 &= 3 \end{cases}$$

16. იპოვეთ $x_1 - x_3$, თუ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

17. სამსაქონლიანი ბაზრის მოთხოვნის ფუნქციებია შესაბამისად

$$\begin{aligned} Q_1 &= 8 - P_1 + P_2 - P_3; \\ Q_2 &= 10 + P_1 - P_2 - P_3; \\ Q_3 &= 6 + P_1 + P_2 - 3P_3. \end{aligned}$$

მიწოდების ფუნქციები კი -

$$\begin{aligned} Q_1 &= -3 + P_1; \\ Q_2 &= -7 + P_2; \\ Q_3 &= -2 + P_3. \end{aligned}$$

სადაც $P_1, P_2, P_3$ შესაბამისი პროდუქტების ერთეულის ფასებია. იპოვეთ წონასწორობის ფასები და წონასწორობის სიდიდეები სამივე სახის საქონლისათვის.

# ლექცია 8

# ფუნქციის წარმოებული

ამ ლექციაში განვიხილავთ წირის მხები წრფისა და წირის დახრის ცნებებს. შემოვიღებთ ფუნქციის წარმოებულის ცნებას, რომელიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს მათემატიკასა და მის გამოყენებებში.

## 8.1 წირის მხები. წირის დახრა

როგორც ვიცით, წრფის ნებისმიერ ორ მოცემულ წერტილს შორის გადაადგილებისას მათი ორდინატთა ცვლილების $\Delta Y = y_1 - y_2$ შეფარდებას აბსცისთა ცვლილებასთან $\Delta X = x_1 - x_2$ წრფის **დახრა, ანუ გრადიენტი** ეწოდება (იგულისხმება, რომ წრფე არ არის ვერტიკალური). თუ წრფის დახრას $m$ ასოთი აღვნიშნავთ, მაშინ

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

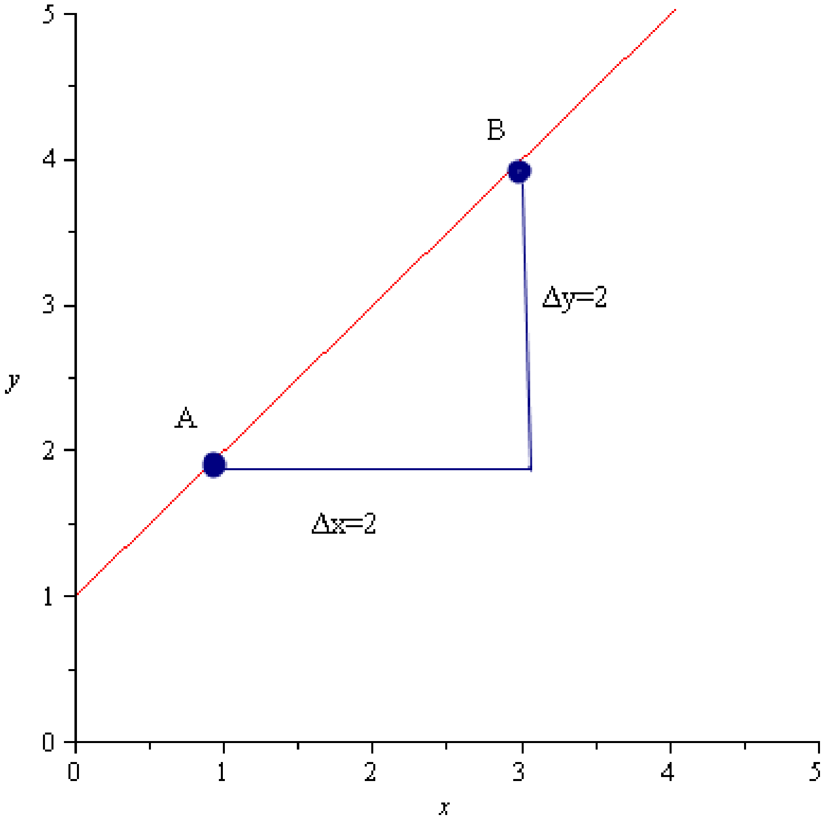
**მაგალითი 8.1** *იპოვეთ* $A$ *და* $B$ *წერტილებზე გამავალი წრფის დახრა*
$1) A(1,2), B(3,4)$
$2) A(1,2), C(4,1)$
$3) A(1,2), D(5,2)$

**ამოხსნა:** 1) როგორც სურ. 8.1 -დან ჩანს, როცა $A$ წერტილიდან ვმოძრაობთ $B$ წერტილისკენ, $y$ კოორდინატი იცვლება 2-დან 4-მდე, ანუ იზრდება 2 ერთეულით; ხოლო $x$ კოორდინატი იცვლება 1-დან 3-მდე, ე.ი ისიც იზრდება 2 ერთეულით. მაშინ წრფის დახრა

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

2) $A$ წერტილიდან $C$ წერტილისკენ მოძრაობისას (სურ. 8.2), $y$ კოორდინატი იცვლება 2-დან 1-მდე. ანუ მცირდება 1 ერთეულით, ხოლო $x$ კოორდინატი იცვლება 1-დან 4-მდე, ე.ი. იზრდება 3 ერთეულით. მაშასადამე, დახრა

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{1-2}{4-1} = \frac{-1}{3} = \frac{-1}{3}$$




სურ 8.1

3) $A$ წერტილიდან $D$ წერტილისკენ მოძრაობისას (სურ. 8.3) $y$ კოორდინატი უცვლელად 2-ის ტოლია, ხოლო $x$ კოორდინატი იცვლება 1-დან 5-მდე, ანუ იზრდება 4 ერთეულით. მაშასადამე, დახრა

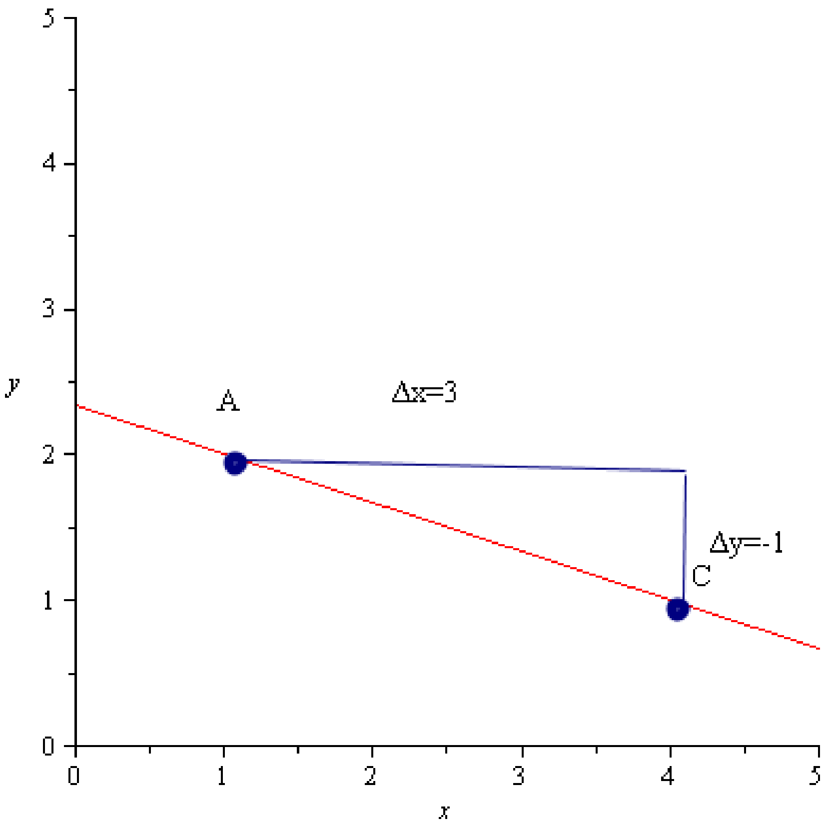
$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{2-2}{5-1} = \frac{0}{4} = 0$$

განხილული მაგალითიდან ჩანს, რომ **ზრდადი წრფეების დახრა დადებითი სიდიდეა, კლებადი წრფეების-უარყოფითი, ხოლო ჰორიზონტალური წრფეების დახრა ნულის ტოლია.**

სამწუხაროდ, ეკონომიკაში გამოყენებული ფუნქციებიდან ყველა არ არის წრფივი. ამიტომ აუცილებელია დახრის ცნების გაფართოება უფრო ზოგადი წირებისთვის. ამისათვის დაგვჭირდება წირის მხების განმარტების შემოღება.

რაიმე წირზე მოვნიშნოთ $P$ და $Q$ წერტილები. წრფეს, რომელიც გადის $P$ და $Q$ წერტილებზე, ვუწოდოთ მოცემული წირის მკვეთი წრფე. როცა $Q$ წერტილი მოძრაობს წირის გასწვრივ $P$ წერტილისკენ ნებისმიერი მხრიდან, მაშინ მკვეთი წრფე იცვლის თავის მდებარეობას და უახლოვდება გარკვეულ ფიქსირებულ $t$ წრფეს (სურ 8.4). ეს $t$ წრფე, როგორც ზღვრული მდებარეობა მკვეთი წრფისა, არის მოცემული წირის მხები წრფე $P$ წერტილში.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ფუნქციებს, რომელთა შესაბამისი გრაფიკების ნებისმიერ წერტილზე შესაძლებელი იქნება მხები წრფის გავლება.




სურ 8.2

> წირის დახრა $x = a$ წერტილში განიმარტება, როგორც ამ წერტილზე გავლებული მხები წრფის დახრა(სურ. 8.5).

სურ. 8.6 ზე გამოსახულია წირი, რომლის რამდენიმე წერტილში გავლებულია მხები წრფე. ყურადსაღებია ის ფაქტი, რომ როცა წერტილები გადაადგილდებიან წირზე მარცხნიდან მარჯვნივ, მათზე გავლებული მხებების დახრები იზრდება.

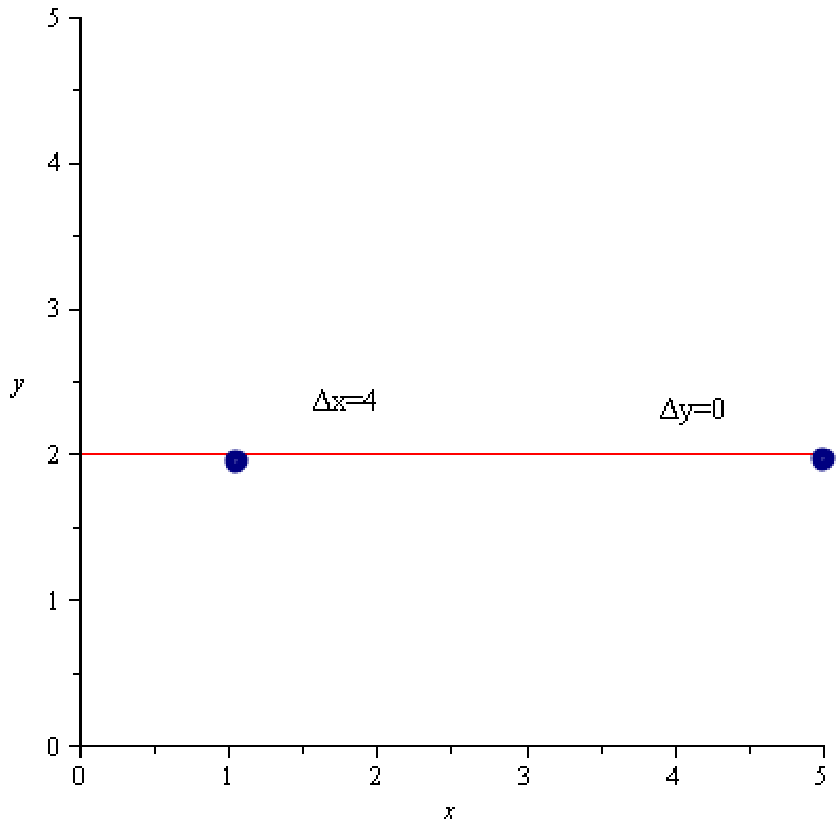
ეს გარემოება ხაზს უსვამს მნიშვნელოვან განსხვავებას წრფის დახრასა და წირის დახრას შორის. წრფის შემთხვევაში **დახრა უცვლელია და არ არის დამოკიდებული,** თუ წრფის რომელ ორ წერტილს შევარჩევთ მის გამოსათვლელად. სურ. 8.7 -ზე გამოსახული წრფისთვის ყველა $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ სახის შეფარდების მნიშვნელობა $\frac{1}{2}$-ის ტოლია. თუმცაღა, როგორც ზემოთ ვნახეთ, წირის დახრა იცვლება მასზე მოძრაობისას.

## 8.2 ფუნქციის წარმოებული

$x = a$ წერტილში $f$ ფუნქციის გრაფიკის დახრის (გრადიენტის) ჩასაწერად მათემატიკაში გამოიყენება აღნიშვნა

$$f'(a).$$

ამ ჩანაწერში $f$ გამოსახავს განსახილველ ფუნქციას, $a$ აღნიშნავს იმ წერტილს, რომელშიც ვეძებთ გრადიენტს, ხოლო სიმბოლო შტრიხი $'$ გამოიყენება იმისათვის, რომ განვასხვავოთ გრადიენტი ფუნქციის მნიშვნელობისგან. $f(a)$ გამოსახავს წირის სიმაღლეს $OX$ ღერძიდან $x = a$ წერტილში, მაშინ როცა $f'(a)$ აღნიშნავს ამ წერტილში წირის გრადიენტის მნიშვნელობას.




სურ 8.3

ფუნქციის გრაფიკის დახრას ეწოდება ფუნქციის წარმოებული.

აღსანიშნავია, რომ, თუ რაიმე $x$ წერტილებში ფუნქციის წარმოებული არსებობს, მაშინ ასეთი $x$-ების ყოველ მნიშვნელობას ცალსახად შეესაბამება წარმოებული $f'(x)$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, "$x$ წერტილში $f$ ფუნქციის გრაფიკის დახრის პოვნის"ოპერაცია განსაზღვრავს დახრის ფუნქციას, რომელსაც **წარმოებული ფუნქცია** ეწოდება.

წარმოებული ფუნქციის აღსანიშნავად ასევე გამოიყენება სიმბოლო

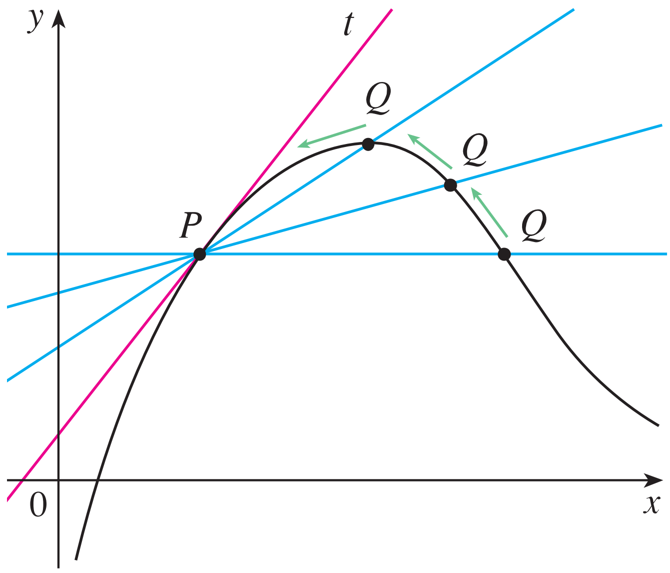
$$\frac{dy}{dx}$$

(იკითხება: დე იგრეკი დე იქსით, და **არა-** დე იგრეკი შეფარდებული დე იქსთან).

**მაგალითი 8.2** *გამოვთვალოთ* $f(x) = x^2$ *ფუნქციის მნიშვნელობები* $x = -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2$ *წერტილებში და ავაგოთ გრაფიკი. ამავე გრაფიკის* $x = -1,5; -0,5; 0; 0,5; 1,5$ *შესაბამის წერტილებზე გავავლოთ მხები წრფეები.*

*მაშასადამე, შევაფასოთ* $f'(-1,5), f'(-0,5), f'(0), f'(0,5), f'(1,5)$ *მნიშვნელობები.*

**ამოხსნა.** კალკულატორის გამოყენებით $f(x) = x^2$ ფუნქციისთვის შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი




სურ 8.4

| $x$ | $-2$ | $-1,5$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $2,25$ | $1$ | $0,25$ | $0$ | $0,25$ | $1$ | $2,25$ | $4$ |

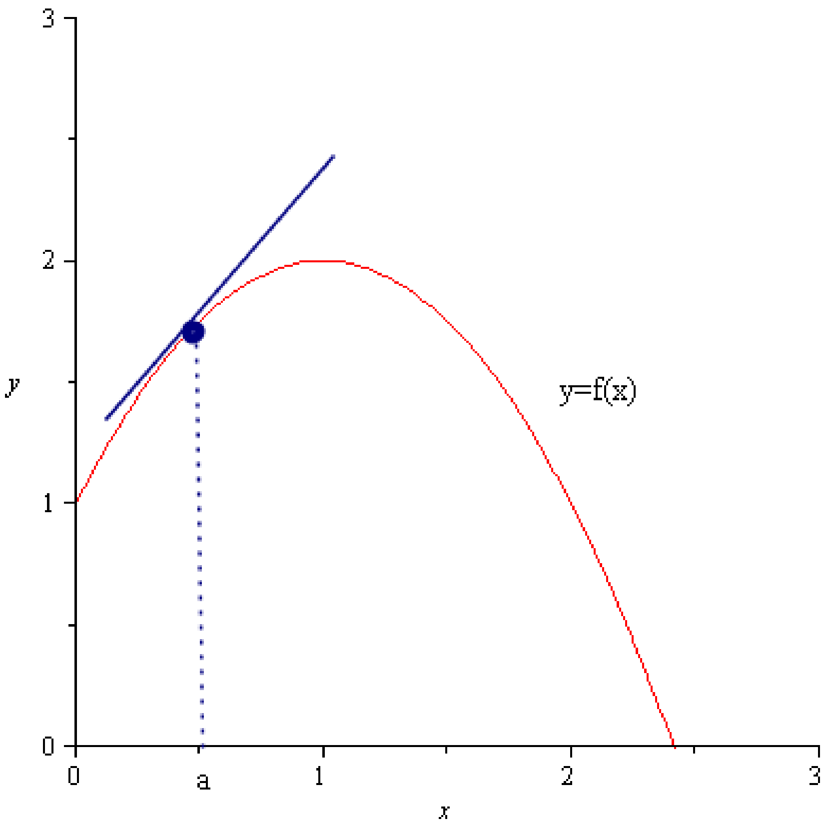
ამ მონაცემებით შეგვიძლია ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი(სურ. 8.8) გრაფიკიდან ჩანს, რომ მხები წრფეების დახრები არის :

$$f'(-1,5) = \frac{-1,5}{0,5} = -3$$
$$f'(-0,5) = \frac{-0,5}{0,5} = -1$$
$$f'(0) = 0$$
$$f'(0,5) = \frac{0,5}{0,5} = 1$$
$$f'(1,5) = \frac{1,5}{0,5} = 3$$

როგორც ვხედავთ, $Y$ ღერძის მიმართ სიმეტრიულ წერტილებზე გავლებული გრაფიკის მხებების დახრები მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან ერთმანეთისგან. ეს იმიტომ ხდება, რომ წირი მიემართება ქვემოთ $Y$ ღერძის მარცხნივ და მიემართება ზემოთ $Y$ ღერძის მარჯვნივ.

განხილული მაგალითიდან ნათლად ჩანს, თუ რამდენად ძნელია გრაფიკულად $f'(a)$-ს პოვნა. მართლაც, შეუძლებელია დაიხატოს იდეალურად გლუვი წირი და მასზე ზუსტად მოინიშნოს მხებების გავლების წერტილები. სირთულეს წარმოადგენს ასევე გრადიენტის გამოსათვლელად "ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მანძილების- გაზომვა. ამ ყველაფერმა შეიძლება მოგვცეს დიდი ცდომილება $f'(a)$-ს ზუსტ მნიშვნელობასთან მიმართებაში. საბედნიეროდ, არსებობს მარტივი ფორმულა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ $f'(a)$, როცა $f$ არის ხარისხოვანი ფუნქცია. მტკიცდება, რომ თუ $f(x) = x^n$, მაშინ $f'(x) = nx^{n-1}$. ან კიდევ, თუ $y = x^n$, მაშინ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

ფუნქციის წარმოებულის პოვნის პროცესს ფუნქციის **დიფერენცირება** ეწოდება. ამრიგად, $x^n$-ის დიფერენცირებისთვის საჭიროა ხარისხის მაჩვენებელი გადმოვიტანოთ წინ მამრავლად და ხარისხი შევამციროთ ერთით. $f(x) = x^2$ ფუნქციის წარმოებული ტოლია $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$.




სურ 8.5

ამ ფაქტის გამოყენებით მარტივად ვნახავთ, რომ $f(x) = x^2$ ფუნქციისთვის

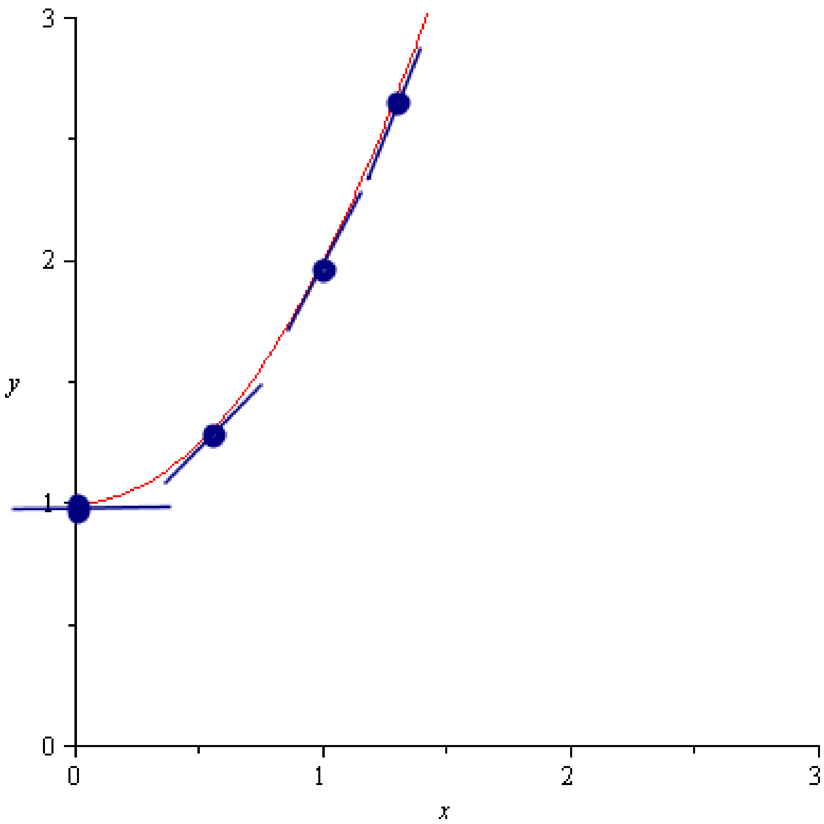
$$\begin{gathered} f'(-1,5) = 2 \times (-1,5) = -3 \\ f'(-0,5) = 2 \times (-0,5) = -1 \\ f'(0) = 2 \times (0) = 0 \\ f'(0,5) = 2 \times (0,5) = 1 \\ f'(1,5) = 2 \times (1,5) = 3, \end{gathered}$$

რაც ზუსტად ემთხვევა **მაგალითი 8.2**-ში გრაფიკული ხერხით მიღებულ შედეგებს.

**მაგალითი 8.3** *გააწარმოეთ*

$$1) y = x^4 \quad 2) y = x^{10} \quad 3) y = x \quad 4) y = 1 \quad 5) y = \frac{1}{x^4} \quad 6) y = \sqrt{x}$$

**ამოხსნა:** ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება:
1) $\frac{dy}{dx} = 4x^{4-1} = 4x^3$.
2) $\frac{dy}{dx} = 10x^{10-1} = 10x^9$
3) გამოვიყენოთ გაწარმოების ფორმულა იმ შემთხვევისთვის, როცა $n = 1$. რადგანაც $x^1 = x$, ამიტომ მივიღებთ:
$\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$, ვინაიდან $x^0 = 1$.
4) 1-ის წარმოებული არის ნული, ამ ფაქტის სამართლიანობა ცხადი ხდება $y = 1$ ფუნქციის გრაფიკის განხილვისას. ვინაიდან ეს გრაფიკი (სურ. 8.9) წარმოადგენს




სურ 8.6

ჰორიზონტალურ წრფეს ($x$ ღერძის პარალელურს), ამიტომ მისი გრადიენტი მუდმივად ნულის ტოლია.

5) ვინაიდან $y = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$, ამიტომ მივიღებთ
$\frac{dy}{dx} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$.

6) შევნიშნოთ, რომ $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, ამიტომაც
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

## 8.3 სავარჯიშოები

1. იპოვეთ იმ წრფის დახრა, რომელიც გადის შემდეგ წერტილებზე:

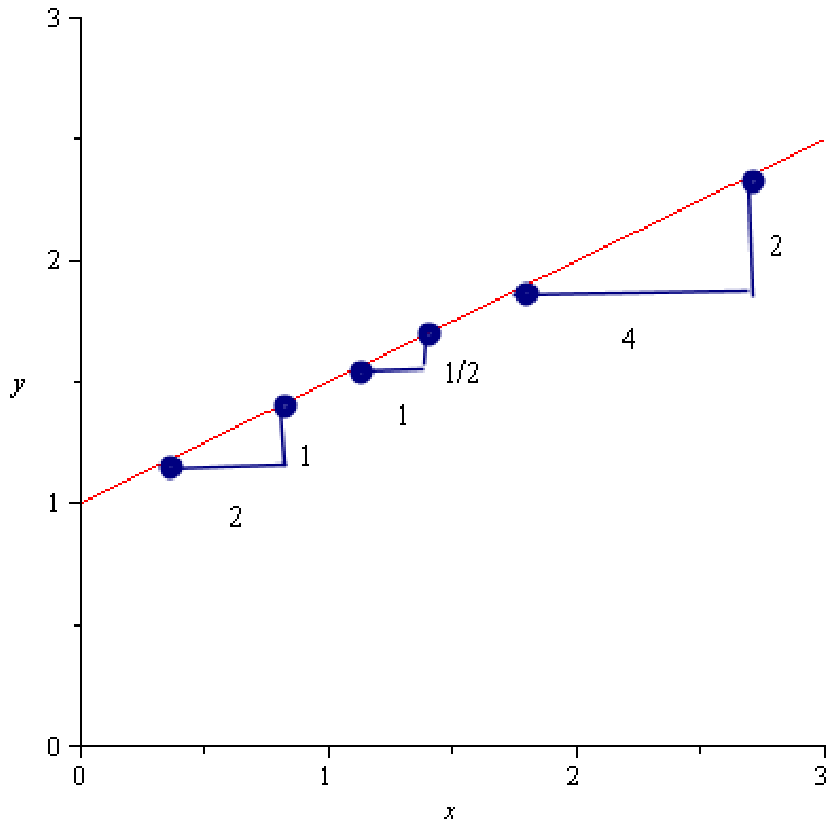
   ა) (2;5) და (4;9), ბ) (3;-1) და (7;-5), გ) (7;19) და (4;19).

2. აჩვენეთ, რომ (0;2) და (3;0) წერტილები ეკუთვნიან $2x + 3y = 6$ წრფეს. იპოვეთ ამ წრფის დახრა. ასევე დაადგინეთ, მოცემული წრფე ზრდადია, კლებადი თუ ჰორიზონტალური?

3. აჩვენეთ, რომ (0;b) და (1;a+b) წერტილები ეკუთვნიან $y = ax+b$ წრფეს. აჩვენეთ, რომ ამ წრფის აქვს $a$-ს ტოლი დახრა.

4. დახაზეთ $f(x) = 5$ ფუნქციის გრაფიკი და ახსენით, რატომ არის სამართლიანი ტოლობა $f'(x) = 0$.

5. გამოთვალეთ $f(x) = x^7$ ფუნქციის გრაფიკის დახრა $x = 2$ წერტილში.




სურ 8.7

6. გააწარმოეთ

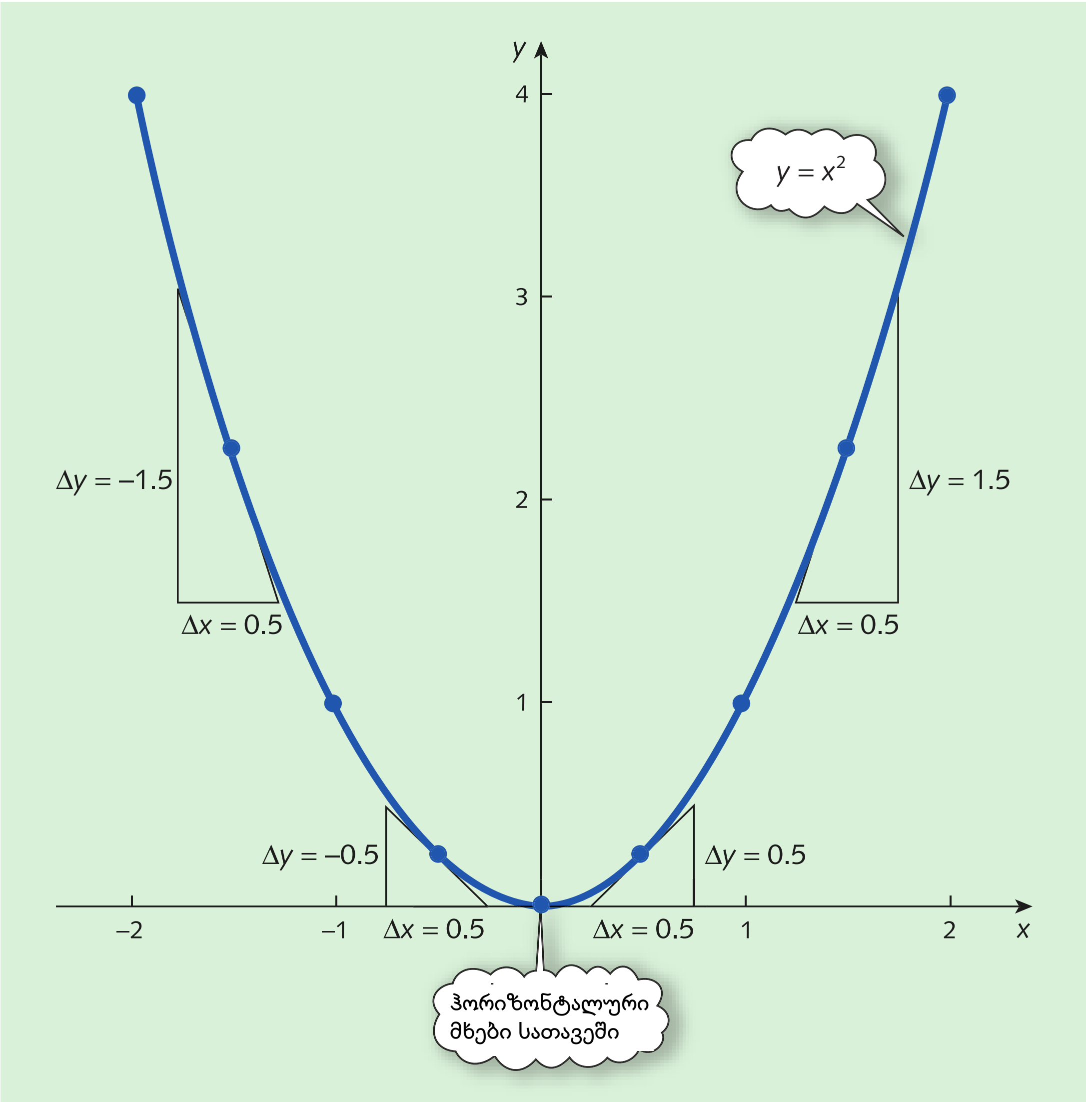
$$1)y = x^8 \quad 2)y = x^{50} \quad 3)y = x^{17} \quad 4)y = x^{777}$$

7. გააწარმოეთ შემდეგი ფუნქციები და პასუხები ჩაწერეთ რადიკალების გამოყენებით

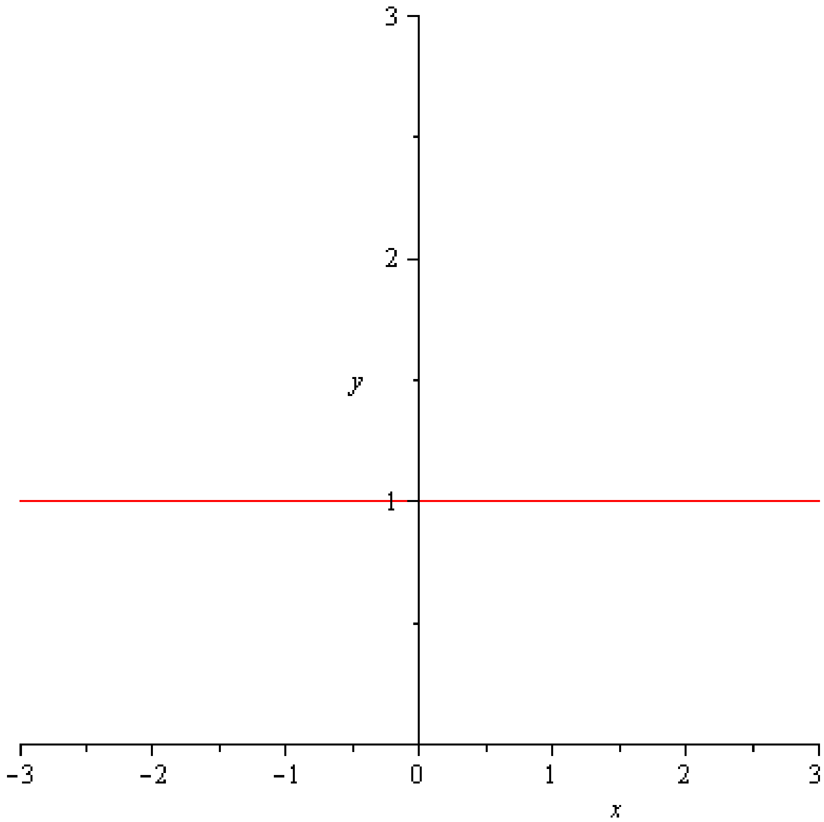
$$1)f(x) = \sqrt[3]{x} \quad 2)f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \quad 3)f(x) = x\sqrt{x}$$

8. იპოვეთ იმ წერტილ(ებ)ის კოორდინატები, რომელშიც წირს გააჩნია მოცემული გრადიენტი

   1)$y = x^5$, გრადიენტი=405 2)$y = \frac{1}{x^2}$, გრადიენტი=16


y
4
3
2
1
$y = x^2$
$\Delta y = -1.5$
$\Delta x = 0.5$
$\Delta y = 1.5$
$\Delta x = 0.5$
$\Delta y = -0.5$
$\Delta y = 0.5$
−2
−1
$\Delta x = 0.5$
$\Delta x = 0.5$
1
2
x
ჰორიზონტალური
მხები სათავეში

სურ 8.8




სურ 8.9

# ლექცია 9

# გაწარმოების წესები. ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულები

ამ ლექციაში შევისწავლით ფუნქციათა ჯამის, ნამრავლისა და ფარდობის გაწარმოების წესებს. განვიხილავთ რთული ფუნქციის (ფუნქციათა კომპოზიციის) წარმოებულის პოვნის მეთოდს. ასევე მოვიყვანთ ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილს.

## 9.1 გაწარმოების წესები

**წესი 1**. თუ $h(x) = cf(x)$, მაშინ $h'(x) = cf'(x)$, სადაც $c$ ნებისმიერი მუდმივია.

**მაგალითი 9.1** *გააწარმოეთ:*

$1)y = 2x^4 \quad 2)y = 11x$

*ამოხსნა:*

*1) $2x^4$-ის გასაწარმოებლად ჯერ გავაწარმოოთ $x^4$, რაც უდრის $4x^3$-ს და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ 2-ზე. მაშასადამე,* $\frac{dy}{dx} = 2(4x^3) = 8x^3$.

*2) $11x$-ის გასაწარმოებლად ჯერ გავაწარმოოთ $x$: $x' = 1$ და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ 11-ზე. საბოლოოდ გვექნება:* $\frac{dy}{dx} = 10 \cdot (1) = 10$.

მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია. მართლაც, ვინაიდან მუდმივი $y = c$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს ჰორიზონტალურ წრფეს, ამიტომ მისი დახრა ნულის ტოლია.

**წესი 2. ჯამის და სხვაობის წარმოებულის გამოთვლა.**
თუ $h(x) = f(x) + g(x)$, მაშინ $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
ხოლო, თუ $h(x) = f(x) - g(x)$, მაშინ $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

**მაგალითი 9.2** *გააწარმოეთ*

$1) y = x^3 + x^{40} \quad 2) y = x^4 + 5 \quad 3) y = x^5 - x^2 \; 4) y = x^6 - 4$

***ამოხსნა.***

*1) გავაწარმოოთ $x^3$ და $x^{40}$ ცალ-ცალკე და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ. გვექნება:*

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 40x^{39}$.

*2) აქაც გავაწარმოოთ $x^4$ და 5 ცალ-ცალკე. ვინაიდან 5-ის, როგორც მუდმივის, წარმოებული ნულის ტოლია, საბოლოოდ მივიღებთ: $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 0 = 4x^3$.*

*3) ანალოგირად, გავაწარმოოთ $x^5$ და $x^2$ ცალ-ცალკე და მიღებული შედეგები გამოვაკლოთ ერთმანეთს. მივიღებთ: $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 2x$.*

*4) აქაც, გავაწარმოოთ ცალ-ცალკე და წარმოებულები გამოვაკლოთ ერთმანეთს: $\frac{dy}{dx} = 6x^5 - 0 = 6x^5$.*

*წინა ორი წესის კომბინირებული გამოყენებით შეიძლება უფრო "მსუყე"ფუნქციების გაწარმოება. ასე მაგალითად, გავაწარმოოთ ფუნქცია*

$$y = x^3 + 6x^2 - 3x + 15$$

*მივიღებთ:* $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 12x - 3$.

ზემოთ განხილული გაწარმოების წესები, სამწუხაროდ, არ იძლევა ყველა ტიპის ფუნქციის გაწარმოების საშუალებას. ასე მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია $y = (2x+3)^{10}$. ამ გამოსახულების განსაკუთრებულობა იმაში მდგომარეობს, რომ ის წარმოადგენს ე.წ. **"ფუნქციის ფუნქციას"**. ამ ცნების გასააზრებლად, მოდით მოვიფიქროთ, თუ როგორ გამოვთვლიდით უშუალოდ $(2x+3)^{10}$ გამოსახულების მნიშვნელობას. ბუნებრივია, რომ თავდაპირველად გამოვთვალოთ შუალედური რიცხვი, ვთქვათ $u = 2x + 3$ და შემდეგ ავიყვანოთ ის მე-10 ხარისხში, რათა მივიღოთ რიცხვი $y = u^{10}$. ანუ, თავდაპირველად $x$ ცვლადზე მოდებულია **შიდა ფუნქცია**, რომელიც $x$-ს ამრავლებს 2-ზე და უმატებს 3-ს, ხოლო შემდეგ ამ შუალედურ $u$ შედეგზე მოდებულია "მე-10 ხარისხში აყვანის"**გარე ფუნქცია**. ასეთი თანმიმდევრობით ვღებულობთ საბოლოო $y$ რიცხვს.

ასეთი გზით მიღებულ ფუნქციას (ანუ, ფუნქციის ფუნქციას) **რთული ფუნქცია (ან ფუნქციათა კომპოზიცია)** ეწოდება.

**წესი 3. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი**

თუ $y$ არის $u$-ს ფუნქცია, ხოლო $u$ თავის მხრივ წარმოადგენს $x$-ის ფუნქციას, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \tag{9.1}$$

დავუბრუნდეთ ჩვენს $y = (2x+3)^{10}$ ფუნქციას, რომლისთვისაც $y = u^{10}$ და $u = 2x+3$. მაშინ

$$\frac{dy}{du} = 10u^9 = 10(2x+3)^9,$$
$$\frac{du}{dx} = 2.$$

საბოლოოდ, (9.1)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 10(2x+3)^9 \cdot 2 = 20(2x+3)^9.$$

პრაქტიკაში, წარმოებულების გამოთვლისას, არაა აუცილებელი ყოველთვის შუალედური $u$ ფუნქციის შემოღება. უბრალოდ, ჯერ უნდა გავაწარმოოთ გარე ფუნქცია და შედეგი გავამრავლოთ შიდა ფუნქციის წარმოებულზე.

**მაგალითი 9.3** *გააწარმოეთ*

$$y = (x^2 + 4x - 7)^3$$

***ამოხსნა.*** *ჯერ გავაწარმოოთ გარე ხარისხოვანი ფუნქცია, მივიღებთ $3(x^2+4x-7)^2$. შემდეგ ის გავამრავლოთ შიდა ფუნქციის-კვადრატული სამწევრის წარმოებულზე, რომელიც ტოლია $2x+4$. მაშასადამე, საბოლოოდ გვექნება:*

*თუ $y = (x^2+4x-7)^3$, მაშინ $\frac{dy}{dx} = 3(x^2+4x-7)^2 \cdot (2x+4)$.*

**წესი 4. ნამრავლის წარმოებული**
თუ $y = uv$, მაშინ $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.
მაშასადამე, ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებულის საპოვნელად, თითოეული მათგანი უნდა გავამრავლოთ მეორის წარმოებულზე და შევკრიბოთ.

**მაგალითი 9.4** *გააწარმოეთ*

$$y = x(x^2+5)^3$$

***ამოხსნა.*** *მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს ორი ფუნქციის ნამრავლს: $x$ და $(x^2+5)^3$. აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად $u$ და $v$-თი. მაშინ, თუ $u = x$ და $v = (x^2+5)^3$, მაშინ $\frac{du}{dx} = 1$ და $\frac{dv}{dx} = 6x(x^2+5)^2$. საბოლოოდ, ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = x \cdot 6x(x^2+5)^2 + (x^2+5)^3 \cdot 1 = \\ &= 6x^2(x^2+5)^2 + (x^2+5)^3 = (x^2+5)^2(7x^2+5). \end{aligned}$$

**წესი 5. წილადის წარმოებული.**
თუ $y = \frac{u}{v}$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v - \frac{dv}{dx}u}{v^2}.$$

**მაგალითი 9.5** *გააწარმოეთ*

$$y = \frac{1+x^2}{2-x^3}$$

*ამოხსნა.* *წილადის გაწარმოების ფორმულის გამოსაყენებლად მოცემული წილადის მრიცხველი აღვნიშნოთ u-თი, ხოლო მნიშვნელი–v-თი. ე.ი.*

$u = 1 + x^2$ და $v = 2 - x^3$. *მაშინ*

$\frac{du}{dx} = 2x$ და $\frac{dv}{dx} = -3x^2$. *საბოლოოდ გვექნება:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(2-x^3)-(-3x^2)(1+x^2)}{(2-x^3)^2} =$$
$$= \frac{4x-2x^4+3x^2+3x^4}{(2-x^3)^2} = \frac{x^4+3x^2+4x}{(2-x^3)^2}.$$

## 9.2 ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულები

როგორც უკვე ვნახეთ, თუ მოცემულია **ხარისხოვანი ფუნქცია** $y = x^\alpha$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

**ტრიგინომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები.** $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ და $\cot x$ ტრიგინომეტრიული ფუნქციების წარმოებული განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{ll} y = \sin x, & \frac{dy}{dx} = \cos x, \\ y = \cos x, & \frac{dy}{dx} = -\sin x, \\ y = \tan x, & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\ y = \cot x & \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{array}$$

**მაგალითი 9.6** *გააწარმოეთ*

$1) y = \sin 3x \quad 2) y = \cos 2x \cdot tanx$

*ამოხსნა.* *1) რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ:*

$$\frac{dy}{dx} = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x.$$

*2) აქ გამოვიყენოთ ნამრავლისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესები კომბინირებულად. გვექნება:*

$$\frac{dy}{dx} = (-\sin 2x) \cdot 2 \cdot tanx + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos 2x = -2\sin 2x \cdot tanx + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

**ექსპონენციალური და ლოგარითმული ფუნქციების წარმოებულები.** თუ $y = e^x$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

თუ $y = \ln x$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით შესაძლებელია უფრო ზოგადი წესის დამტკიცებაც. კერძოდ, თუ

$$y = e^{mx},$$

მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \tag{9.2}$$

ხოლო, თუ

$$y = \ln mx,$$

მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{mx} m = \frac{1}{x} \tag{9.3}$$

**მაგალითი 9.7** *გააწარმოეთ*

$1) y = e^{2x} \quad 2) y = \ln 5x (x > 0)$

***ამოხსნა.*** *1) (9.2)-ის გამოყენებით მივიღებთ:*

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}.$$

*2) (9.3)-ის გამოყენებით გვექნება:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}.$$

## 9.3 მეორე რიგის წარმოებული

თუ გავაანალიზებთ ზემოთ განხილულ მაგალითებს, ადვილად შევამჩნევთ, რომ ფუნქციის გაწარმოების შედეგი კვლავ ფუნქციას წარმოადგენს. ამიტომ, ბუნებრივია, შეიძლება განვიხილოთ წარმოებული ფუნქციის კიდევ ერთხელ გაწარმოების ოპერაცია და ის ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$f''(x)$$

ან

$$\frac{d^2y}{dx^2}.$$

(იკითხება: დე ორი იგრეკ დე იქს კვადრატით).

$f'(x)$ ფუნქციას ეწოდება **პირველი რიგის წარმოებული**, ხოლო $f''(x)$-ს **მეორე რიგის წარმოებული.**

**მაგალითი 9.8** *იპოვეთ* $f(x) = 7x^2 - 4x + 8$ *ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული.*

***ამოხსნა.*** *ჯერ ვიპოვოთ პირველი რიგის წარმოებული:*

$$f'(x) = 14x - 4,$$

*მიღებული ფუნქცია კიდევ ერთხელ გავაწარმოოთ, ანუ ვიპოვოთ მეორე რიგის წარმოებული:*

$$f''(x) = 14.$$

**მაგალითი 9.9** *გამოთვალეთ $f''(1)$, თუ $f(x) = 7x^3 - 10x^2$.*

***ამოხსნა.*** *$f''(1)$ ჩანაწერი ნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის მნიშვნელობას, როცა $x = 1$. ამიტომ, მის საპოვნელად ჯერ უნდა ვიპოვოთ $f''(x)$ და შემდეგ მასში $x$-ის ნაცვლად ჩავსვათ 1. გვექნება:*

*$f'(x) = 21x^2 - 20x$ და $f''(x) = 42x - 20$. საბოლოოდ მივიღებთ: $f''(1) = 42 \cdot (1) - 20 = 22$.*

მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანს შეიძლება მიეცეს შემდეგი გრაფიკული ინტერპრეტაცია. როგორც ვიცით, პირველი რიგის წარმოებული $f'(x)$ ზომავს წირის გრადიენტს, ანუ დახრას.თუ $f'(x)$-ის წარმოებული დადებითია, ანუ $f''(x) > 0$, მაშინ $f'(x)$ იზრდება. ეს იმას ნიშნავს, რომ მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობისას გრაფიკი სულ უფრო მრუდდება და ხდება მისი ჩაზნექვა. მაშასადამე, წირი **ჩაზნექილია** იქ, სადაც $f''(x) > 0$. მეორეს მხრივ, თუ $f''(x) < 0$, მაშინ $f'(x)$ უნდა იყოს კლებადი და წირი იქნება **ამოზნექილი**. ორივე ეს შემთხვევა გამოსახულია სურ. 9.1-ზე. ამ ფუნქციისთვის $f''(x) < 0$ $x = a$ წერტილის მარცხნივ, ხოლო $f''(x) > 0$ $x = a$ წერტილის მარჯვნივ. თვით $x = a$ წერტილში წირი გადადის ამოზნექილობიდან ჩაზნექილობაში და აქ $f''(a) = 0$.

## 9.4 სავარჯიშოები

1. გააწარმოეთ :

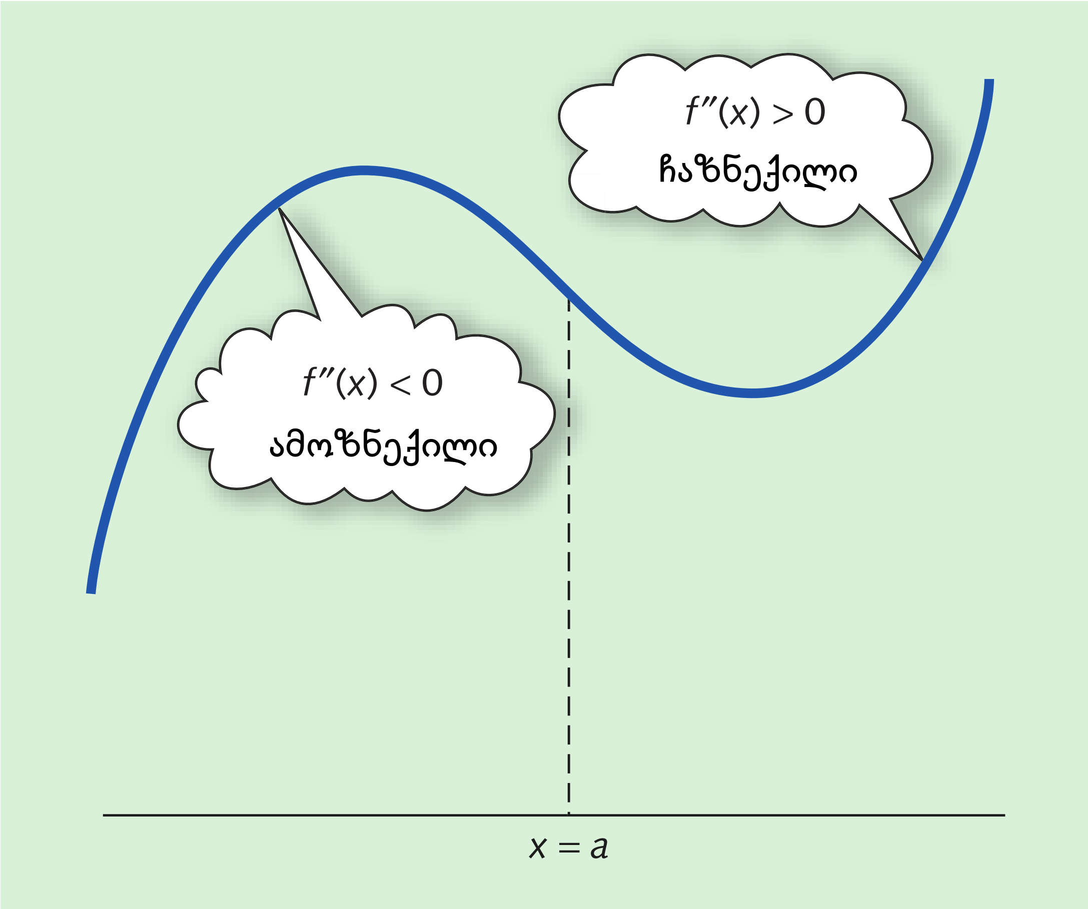
$$1) y = 6x^3 \qquad 2) y = \frac{4}{x} \qquad 3) y = 5x + 7$$
$$4) y = x^2 + x + 3 \qquad 5) y = x^3 - 4x + 9 \qquad 6) y = 2x - \frac{11}{x}$$
$$7) y = 3x^4 + 5x^3 - 8x^2 - x - 7 \qquad 8) y = ax + b \qquad 9) y = ax^2 + bx + c$$

2. ყოველი $f(x)$ ფუნქციისთვის შეაფასეთ $f'(a)$ მოცემულ წერტილში

$$1) f(x) = 3x^9, a = 1$$
$$2) f(x) = x^2 - 2x, a = 3$$
$$3) f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8, a = 0$$
$$4) f(x) = 5x^4 - \frac{4}{x^4}, a = -1$$
$$5) f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x}, a = 4$$

3. იპოვეთ $\frac{d^2y}{dx^2}$, თუ

$$1) y = 7x^2 - x \quad 2) y = \frac{1}{x^2} \quad 3) y = ax + b$$




სურ 9.1

4. შეაფასეთ $f''(2)$ შემდეგი ფუნქციისთვის
   $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10x - 7$

5. იპოვეთ:
   1) $\frac{dQ}{dP}$ მიწოდების $Q = P^2 + P + 1$ ფუნქციისთვის;
   2) $\frac{d(TR)}{dQ}$ მთლიანი ამონაგების ფუნქციისთვის $TR = 50Q - 3Q^2$;
   3) $\frac{d(AC)}{dQ}$ საშუალო დანახარჯის ფუნქციისთვის $AC = \frac{30}{Q} + 10$;
   4) $\frac{d\pi}{dQ}$ მოგების ფუნქციისთვის $\pi = -2Q^3 + 15Q^2 - 24Q - 3$.

6. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები

$$1)y = (2x+1)^{11} \quad 2)y = (x^2+3x-6)^4 \quad 3)y = \frac{1}{8x-5}$$
$$4)y = \frac{1}{x^2+1} \qquad 5)y = \sqrt{7x-3}$$

7. ნამრავლის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები

$$1)y = x^2(x+3)^5 \quad 2)y = x^5(4x+3)^2 \quad 3)y = x^4\sqrt{x+1} \ \ 4)y = \sin 3x \cos 2x$$

8. წილადის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები

$$1)y = \frac{x^2}{x+4} \quad 2)y = \frac{2x-1}{x+5} \quad 3)y = \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}$$
$$4)y = \frac{\sin x}{1+\cos x} \quad 5)y = \frac{2+x}{tanx}$$

9. გააწარმოეთ :

$$1)y = e^{6x} \quad 2)y = e^{-22x} \quad 3)y = 2e^{-x} + 4e^{x} \quad 4)y = 9e^{4x} - 3x^2 + 2$$

10. გააწარმოეთ:

$$1)y = \ln 4x \quad 2)y = x \ln x \quad 3)y = \ln(x^4 + 3x^2) \quad 4)y = \frac{e^{2x}}{\ln x}$$

# ლექცია 10

# წარმოებულის ეკონომიკური შინაარსი. მარგინალური ფუნქციები

ამ ლექციაში განვიხილავთ ფუნქციის წარმოებულის ერთ-ერთ გამოყენებას ეკონომიკურ ამოცანებში. კერძოდ, შემოვიღებთ მარგინალური (ზღვრული) ამონაგების, მარგინალური დანახარჯისა და მარგინალური მოგების ფუნქციებს.

წინა ლექციებში ჩვენ დაწვრილებით შევისწავლეთ მთლიანი ამონაგების (TR) ფუნქციის ძირითადი თვისებები. ის განვმარტეთ, როგორც ნამრავლი $PQ$, სადაც $P$ გამოსახავს საქონლის ფასს, ხოლო $Q$ - ამ საქონლის ბაზარზე მოთხოვნის რაოდენობას. პრაქტიკაში, როგორც წესი, ვიყენებთ მოთხოვნის ფუნქციას, რომელიც ამყარებს კავშირს $P$ და $Q$ სიდიდეებს შორის. ის საშუალებას იძლევა $TR$-ის ფორმულა ჩავწეროთ მოთხოვნის $Q$ რაოდენობის ტერმინებში. მაგალითად, თუ $P = 100 - 2Q$ მაშინ $TR = PQ = (100 - 2Q)Q = 100Q - 2Q^2$. ამ ფორმულის გამოყენებით $Q$-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ $TR$-ის შესაბამისი მნიშვნელობა. თუმცა ჩვენთვის ასევე საინტერესოა იმის ცოდნა, თუ როგორია $TR$-ის ცვლილების ეფექტი იმ შემთხვევაში, როცა $Q$-ს მოცემული მნიშვნელობა იცვლება. ამისათვის შემოვიტანოთ **მარგინალური** (ზღვრული, მყისიერი) **ამონაგების** ცნება.

**მარგინალური ამონაგები** არის მთლიანი ამონაგების ფუნქციის წარმოებული მოთხოვნის $Q$ ცვლადით, ე.ი.

$$(MR) = \frac{d(TR)}{dQ} = (TR)'$$

მაგალითად, $TR = 100Q - 2Q^2$ მთლიანი ამონაგების შესაბამისი მარგინალური ამონაგები ტოლი იქნება $MR = \frac{d(TR)}{dQ} = 100 - 4Q$. თუ მიმდინარე მოთხოვნა 15-ის ტოლია, მაშინ $MR = 100 - 4 \cdot (15) = 40$.

ელემენტარული ეკონომიკის სახელმძღვანელოებში ხშირად მარგინალურ ამონაგებს განსაზღვრავენ როგორც მთლიანი ამონაგების ცვლილებას, როდესაც მოთხოვნა $Q$ იზრდება 1 ერთეულით. მარტივად შეიძლება იმის შემოწმება, რომ ეს მეთოდი იძლევა მისაღებ მიახლოებას $MR$-ის მნიშვნელობასთან, თუმცაღა ის განსხვავდება წარმოებულის საშუალებით მიღებული ზუსტი მნიშვნელობისგან. მაგალითად, თუ ზემოთ განხილულ $TR$ ფუნქციაში ჩავსვამთ $Q = 15$ მივიღებთ: $TR = 100\cdot(15)-2\cdot(15)^2 = 1050$. გავზარდოთ $Q$-ს მნიშვნელობა 1 ერთეულით. მაშინ $TR = 100 \cdot (16) - 2 \cdot (16)^2 = 1088$. ამ მეთოდით ზრდა წარმოადგენს 38 ერთეულს, რაც არ ემთხვევა, თუმცა "ახლოსაა" წარმოებულის საშუალებით გამოთვლილ $MR$-ის ზუსტ 40-ის ტოლ მნიშვნელობასთან.

**მაგალითი 10.1** *მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $P = -3Q + 120$. გამოსახეთ $TR$ ფუნქცია $Q$ რაოდენობის საშუალებით და იპოვეთ $MR$-ის მნიშვნელობა, როცა $Q = 10$.*

**ამოხსნა.** *$TR = P \cdot Q = (-3Q + 120)Q = -3Q^2 + 120$. $MR$-ის განმარტებიდან გვექნება: $MR = \frac{d(TR)}{dQ} = -6Q + 120$. როცა $Q = 10$, მივიღებთ: $MR = 120 - 6 \cdot 10 = 60$.*

თუ მთლიანი ამონაგების ცვლილებას აღვნიშნავთ $\Delta(TR)$-ით, ხოლო მოთხოვნის რაოდენობის ცვლილებას –$\Delta Q$-თი, მაშინ მტკიცდება, რომ

$$\Delta(TR) \approx (MR) \times \Delta Q.$$

**მაგალითი 10.2** *ვთქვათ, $TR = 100Q - Q^2$. დაწერეთ შესაბამისი მარგინალური ამონაგების ფუნქცია. თუ მიმდინარე მოთხოვნის რაოდენობა არის 60, შეაფასეთ $TR$-ის მნიშვნელობის ცვლილება $Q$-ს 2 ერთეულით გაზრდის შემთხვევაში.*

**ამოხსნა.** *თუ $TR = 100Q - Q^2$, მაშინ $MR = \frac{d(TR)}{dQ} = 100 - 2Q$. როცა $Q = 60$, $MR = 100 - 2 \cdot (60) = -20$. თუ $Q$ გაიზრდება 2 ერთეულით, ანუ $\Delta Q = 2$, მაშინ მივიღებთ*

$$\Delta(TR) \approx (MR) \times \Delta Q = (-20) \cdot 2 = -40.$$

*მაშასადამე, $Q$-ს 60 ერთეულის დონიდან 2 ერთეულით გაზრდა იწვევს $TR$-ის დაახლოებით 40 ერთეულით შემცირებას.*

ახლა შემოვიღოთ **მარგინალური დანახარჯის** ცნება. მარგინალური (ანუ ზღვრული) დანახარჯი $MC$ წარმოადგენს მთლიანი დანახარჯის ფუნქციის წარმოებულს პროდუქციის $Q$ რაოდენობით. ე.ი.

$$(MC) = \frac{d(TC)}{dQ} = (TC)'.$$

მტკიცდება, რომ თუ წარმოებული პროდუქციის $Q$ რაოდენობა შეიცვლება მცირე $\Delta Q$-თი, მაშინ $TC$-ს შესაბამისი ცვლილება ტოლი იქნება

$$\Delta(TC) \approx (MC) \times \Delta Q. \tag{10.1}$$

კერძოდ, თუ $\Delta Q = 1$, მაშინ

$$\Delta(TC) \approx (MC).$$

მაშასადამე, $(MC)$ გვაძლევს $(TC)$-ს მიახლოებით ცვლილებას, როცა $Q$ იზრდება 1 ერთეულით.

**მაგალითი 10.3** *საქონლის საშუალო დანახარჯის ფუნქცია მოიცემა შემდეგი სახით*

$$(AC) = 2Q + 6 + \frac{13}{Q}.$$

*ჩაწერეთ შესაბამისი $MC$ ფუნქცია. შეაფასეთ ასევე $TC$-ს ცვლილების ეფექტი იმ შემთხვევაში, როცა $Q$-ს მიმდინარე მნიშვნელობა 15 ერთეულიდან მცირდება 3 ერთეულით.*

***ამოხსნა.*** *პირველ რიგში უნდა დავწეროთ $TC$-ს გამოსახულება მოცემული $AC$-ს ფორმულის გამოყენებით. როგორც უკვე ვიცით, საზოგადოდ,*

$$AC = \frac{TC}{Q}.$$

*აქედან, კი $TC = (AC) \cdot Q = (2Q + 6 + \frac{13}{Q})Q = 2Q^2 + 6Q + 13$.*

*გაწარმოების შემდეგ მივიღებთ: $MC = \frac{d(TC)}{dQ} = 4Q + 6$. როცა $Q = 15$, $MC = 4 \cdot (15) + 6 = 66$. თუ $Q$ შემცირდება 3 ერთეულით, მაშინ $\Delta Q = -3$. მაშასადამე, (10.1) ფორმულიდან $TC$-ს ცვლილების შესაფასებლად მივიღებთ:*

$$\Delta(TC) \approx (MC) \times \Delta Q = 66 \times (-3) = -198.$$

*ანუ, $TC$ მცირდება დაახლოებით 198 ერთეულით.*

შემოვიღოთ **მარგინალური მოგების** ცნება. მარგინალური მოგება $(M\Pi)$ წარმოადგენს მოგების ფუნქციის წარმოებულს რეალიზებული პროდუქციის $Q$ რაოდენობით:

$$(M\Pi) = \frac{d\Pi}{dQ} = \Pi'.$$

მარგინალური მოგება გამოსახავს მოგების მყისიერ ცვლილებას (ნაზრდს) სარეალიზაციო პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით. მოგების ნაზრდი მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით:

$$\Delta\Pi(Q) \approx (M\Pi) \times \Delta Q. \tag{10.2}$$

თუ $\Delta Q = 1$, მაშინ

$$\Delta\Pi(Q) \approx (M\Pi).$$

ე.ი. მოგების ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება რეალიზებული პროდუქციის ერთი ერთეულით გაზრდას, გარკვეული მიახლოებით, შეგვიძლია ჩავთვალოთ მარგინალური მოგების ტოლად.

**მაგალითი 10.4** *პროდუქციის წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია FC=100 ლ., ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე - VC=3 ლ. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = 200 - Q$.*

*ა) ვიპოვოთ მარგინალური მოგების ფუნქცია;*

*ბ) დაახლოებით როგორ შეიცვლება მოგება რეალიზებული პროდუქციის ერთი ერთეულით გაზრდისას, თუ აღებულ მომენტში პროდუქციის რეალიზაციის დონეა*

*80 ერთეული. გამოვთვალოთ მოგების ზუსტი ცვლილება და შევადაროთ მიღებულ მიახლოებით მნიშვნელობას.*

***ამოხსნა.*** *ა) ამოცანის პირობიდან გამომდინარე მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია იქნება*

$$TC = FC + (VC) \cdot Q = 100 + 3Q,$$

*ხოლო მთლიანი ამონაგები გამოითვლება შემდეგნაირად*

$$TR = PQ = (200 - Q)Q = 200Q - Q^2.$$

*ამიტომ, მოგების ფუნქციისთვის მივიღებთ*

$$\Pi(Q) = TR - TC = 200Q - Q^2 - (100 + 3Q) = -Q^2 + 197Q - 100.$$

*მარგინალური მოგების ფუნქციის ჩასაწერად გავაწარმოოთ მიღებული მოგების ფუნქცია:*

$$M\Pi = \Pi'(Q) = -2Q + 197.$$

*ბ) ამ შემთხვევაში $Q = 80$ და $\Delta Q = 1$. მოგების მიახლოებითი ცვლილების მოსაძებნად გამოვიყენოთ (10.2) ფორმულა.*

$$\Delta\Pi(80) \approx M\Pi(80) \times 1 = -2 \cdot 80 + 197 = 37.$$

*ამრიგად, თუ აღებულ მომენტში იყიდება 80 ერთეული, მაშინ 1 ერთეულით მეტის გაყიდვა მოგებას ზრდის დაახლოებით 37 ერთეულით(ლარით). გამოვთვალოთ მოგების ზუსტი ნაზრდი, თუ $\Delta Q = 1$:*

$$\Delta\Pi(80) = \Pi(81) - \Pi(80) = -81^2 + 197 \cdot 81 - 100 - \\ -(-80^2 + 197 \cdot 80 - 100) = 36.$$

*როგორც ვხედავთ მოგების ცვლილების მიახლოებით და ზუსტ მნიშვნელობებს შორის სხვაობაა 1 ერთეული(ლარი).*

## 10.1 სავარჯიშოები.

1. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = 60 - Q$.

   ა) მოძებნეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქციისა და მისი შესაბამისი მარგინალური ამონაგების ფუნქციის გამოსახულებები.

   ბ) გამოთვალეთ მარგინალური ამონაგები, როცა $Q = 50$.

   გ) იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ცვლილება, თუ მოთხოვნა იზრდება $Q = 50$-დან $Q = 51$-მდე და შეადარეთ იგი მარგინალური ამონაგების მნიშვნელობას $Q = 50$ ერთეულზე.

2. მთლიანი ამონაგების ფუნქციაა $TR = 300Q - 2Q^2$.

   ა) რას უდრის მარგინალური ამონაგების ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $Q = 25$.

ბ) გამოთვალეთ ამონაგების ფუნქციის ცვლილება მოთხოვნის $\Delta Q = 5$ ერთეულით გაზრდისას, თუ მოცემულ მომენტში მოთხოვნაა $Q = 25$ ერთეული.

3. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით $P = 80 - Q$.

ა) მოძებნეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქციისა და მისი შესაბამისი მარგინალური ამონაგების ფუნქციის გამოსახულებები.

ბ) გამოთვალეთ მარგინალური ამონაგები, როცა $Q = 20$.

გ) იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ცვლილება, თუ მოთხოვნა იზრდება ერთი ერთეულით და შეადარეთ იგი მარგინალური ამონაგების მნიშვნელობას $Q = 20$ ერთეულზე.

4. გამოთვალეთ მარგინალური ამონაგები, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობით:

$$1)P = 6 - 2Q$$
$$2)P = \frac{500}{\sqrt{3+Q}}$$
$$3)P = \sqrt[3]{200 - 4Q}.$$

5. საწარმოს მუდმივი დანახარჯია FC=400 ლ., ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე - VC=4 ლ.

ა) იპოვეთ მთლიანი და მარგინალური დანახარჯები.

ბ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი, როცა $Q = 40$.

გ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილება, თუ მოთხოვნა გაიზრდება 40 ერთეულიდან 43 ერთეულამდე.

6. ვთქვათ, წარმოების საშუალო დანახარჯის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$AC = 3Q + 4 + \frac{15}{Q}$$

ა) იპოვეთ მთლიანი დანახარჯისა და მარგინალური დანახარჯის ფუნქციები.

ბ) მოძებნეთ მარგინალური დანახარჯის საშუალებით გამოთვლილი სრული დანახარჯის ცვლილება, თუ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა მცირდება 20-დან 18 ერთეულამდე.

7. წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია 75 ლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის- $4 + \frac{3}{Q}$.

ა) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი და მარგინალური დანახარჯი პროდუქციის $Q$ რაოდენობისათვის.

ბ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილების ზუსტი მნიშვნელობები

1) მოთხოვნის $\Delta Q = 3$ ერთეულით გაზრდისას;

2) მოთხოვნის $\Delta Q = 4$ ერთეულით შემცირებისას,

თუ აღებულ მომენტში პროდუქციის რეალიზაციის დონეა $Q = 50$ ერთეული.

8. წარმოების მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $K(Q) = 0,03Q^2 - 2Q + 300$. იპოვეთ საშუალო დანახარჯისა და მარგინალური დანახარჯის ფუნქციების მნიშვნელობები, როცა $Q = 50$ და $Q = 100$.

9. იპოვეთ მარგინალური ამონაგები, თუ მთლიანი ამონაგების ფუნქციაა

$$TR = 100Q - 4Q^2.$$

მოძებნეთ ამონაგების ფუნქციის ცვლილება:

ა) მოთხოვნის $\Delta Q = 2$ ერთეულით გაზრდისას;

ბ) მოთხოვნის $\Delta Q = 3$ ერთეულით გაზრდისას,

თუ აღებულ მომენტში მოთხოვნაა $Q = 60$ ერთეული.

10. პროდუქციის წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია FC=80 ლ., ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე - VC=4 ლ. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = 300 - Q$.

ა) იპოვეთ მარგინალური მოგების ფუნქცია;

ბ) მარგინალური მოგების საშუალებით მიახლოებით გამოთვალეთ მოგების ცვლილება, რომელიც შეესაბამება წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის ცვლილებას $Q_1 = 40$ ერთეულიდან $Q_2 = 42$ ერთეულამდე.

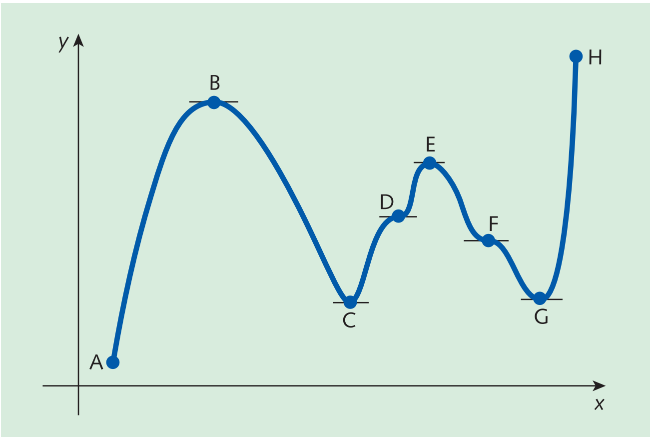
გ) გამოთვალეთ მოგების ზუსტი ცვლილება $Q_1 = 40$ ერთეულიდან $Q_2 = 42$ ერთეულამდე და შეადარეთ ბ)-ში მიღებულ მიახლოებით მნიშვნელობას.

# ლექცია 11

# ეკონომიკური ფუნქციების ოპტიმიზაცია

ამ ლექციაში შემოვიღებთ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების ცნებას. შევისწავლით მეთოდებს, რომლის საშუალებითაც გამოვთვლით ფუნქციის მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს. განვიხილავთ ეკონომიკური ამოცანებისთვის წარმოებულის ეფექტურად გამოყენების მაგალითებს.

დავაკვირდეთ 11.1 სურათზე მოცემული ფუნქციის გრაფიკს. ამ გრაფიკზე მდებარე $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ წერტილების აბსცისებს უწოდებენ მოცემული ფუნქციის სტაციონალურ წერტილებს. ანუ, ეს ის წერტილებია, რომელთა შესაბამის გრაფიკის წერტილებზე გავლებული მხები წრფე ჰორიზონტალურია, ანუ პარალელურია $OX$ ღერძის. მაშასადამე, ამ მხების დახრის კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ამგვარად, $f$ ფუნქციის სტაციონალურ $x$ წერტილში $f'(x) = 0$.




სურ 11.1: სტაციონალური წერტილები

სტაციონალური წერტილები იყოფა სამ ჯგუფად: ლოკალური მაქსიმუმის წერტილები, ლოკალური მინიმუმის წერტილები და გადაღუნვის წერტილები.

$B$ და $E$ წერტილების ორდინატები წარმოადგენენ 11.1 სურათზე მოცემული ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმებს. სიტყვა "ლოკალური"გამოიყენება იმ ფაქტის აღსანიშნად, რომ ეს წერტილი წარმოადგენს ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილს ამავე წერტილის რაიმე მიდამოში. ცხადია, ლოკალური მაქსიმუმი არ არის აუცილებელი, იყოს ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. 11.1 სურათზე $H$ წერტილის ორდინატი წარმოადგენს ფუნქცი-

ის უდიდეს მნიშვნელობას, მაგრამ მისი აბსცისა არ არის სტაციონალური წერტილი, ვინაიდან, ამ წერტილში გავლებული მხები არ არის ჰორიზონტალური.

$C$ და $G$ წერტილების ორდინატები წარმოადგენენ 11.1 სურათზე მოცემული ფუნქციის ლოკალურ მინიმუმებს. ამ შემთხვევაშიც არ არის აუცილებელი, ფუნქციის გლობალური მინიმუმი იყოს რომელიმე ლოკალური მინიმუმის წერტილი. 11.1 სურათზე წერტილი $A$ წარმოადგენს ფუნქციის უმცირეს მნიშვნელობას, რომელიც არ არის სტაციონალური წერტილი.

ლოკალური მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ეწოდებათ.

გადაღუნვის წერტილები ისეთი წერტილებია, რომლებშიც ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობის ხასიათი იცვლება: ამოზნექილობა- ჩაზნექილობით, ან პირიქით. $D$ და $F$ წერტილები 11.1 სურათზე მოცემული ფუნქციის გადაღუნვის წერტილებს წარმოადგენენ. აღნიშნულ წერტილებს არა აქვთ დიდი გამოყენება ეკონომიკაში, თუმცა გამოიყენებიან ფუნქციის გრაფიკის ესკიზის აგებისას. მეორე მხრივ, ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის ცოდნა ძალზედ მნიშვნელოვანია სხვადასხვა სახის ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნისას: თუნდაც, შემოსავლისა და მოგების ფუნქციების მაქსიმუმის წერტილების გამოთვლისას, ასევე საშუალო დანახარჯის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნისას.

ეკონომიკის ამოცანების უმრავლესობაში ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი და მაქსიმუმი ემთხვევა ამავე ფუნქციის გლობალურ მინიმუმსა და მაქსიმუმს. ამიტომ ჩვენ სიტყვა "ლოკალურს"ხანდახან გამოვტოვებთ როცა ვახასიათებთ სტაციონალურ წერტილებს. მიუხედავად ამისა, ჩვენ მაინც უნდა გვახსოვდეს, რომ უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიღწეულ იქნეს არა სტაციონალურ წერტილში, არამედ რომელიმე ბოლოში და ჩვენ აუცილებლად უნდა შევამოწმოთ ეს ფაქტი. აღნიშნული შემოწმება შეგვიძლია სტაციონალურ წერტილებში მნიშვნელობების შედარებით ბოლოებში მნიშვნელობებთან.

მოყვანილი მსჯელობის გათვალისწინებით ნათელია, რომ დაისმის ორი მნიშვნელოვანი კითხვა: როგორ ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის სტაციონალური წერტილები და როგორ დავახასიათოთ ისინი? ანუ, როგორ მოვახდინოთ მათი კლასიფიკაცია? პირველ კითხვაზე პასუხი მარტივია, ვინაიდან, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სტაციონალური წერტილები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$f'(x) = 0.$$

ამგვარად, ჩვენ სტაციონალური წერტილების საპოვნელად გავაწარმოებთ ფუნქციას, გავუტოლებთ წარმოებულს ნულს და ამოვხსნით მიღებულ ალგებრულ განტოლებას. მიღებული სტაციონალური წერტილებისთვის კლასიფიკაცია კი სხვადასხვა გზით არის შესაძლებელი. კერძოდ, შესაძლებელია იმის ჩვენება, რომ თუ $a$ წერტილი სტაციონალური წერტილია და $f''(a) \neq 0$, მაშინ ეს სტაციონალური წერტილი წარმოადგენს ექსტრემუმის წერტილს და

- თუ $f''(a) > 0$, მაშინ $a$ წერტილი წარმოადგენს მინიმუმის წერტილს;
- თუ $f''(a) < 0$, მაშინ $a$ წერტილი წარმოადგენს მაქსიმუმის წერტილს.

ამგვარად, სტაციონალური წერტილების კლასიფიკაციისთვის გვჭირდება ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშნის დადგენა. შესაძლებელია მოხდეს ისეც, რომ $f''(a) = 0$. მაშინ, მეორე რიგის წარმოებული ვერ გაგვცემს ცალსახა პასუხს სტაციონალური $a$ წერტილის კლასიფიკაციისთვის. ასეთ შემთხვევაში $a$ წერტილი შესაძლებელია იყოს მინიმუმის წერტილი, მაქსიმუმის წერტილი ან გადაღუნვის წერტილი. საბოლოო პასუხის დასადგენად უნდა მივმართოთ კვლევის სხვა მეთოდებს.

**მაგალითი 11.1** *იპოვეთ და დაახასიათეთ შემდეგი ფუნქციების სტაციონალური წერტილები:*

ა) $f(x) = x^2 - 4x + 5$;  ბ) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

**ამოხსნა.** ა) პირველ რიგში გამოვთვალოთ ფუნქციის წარმოებული, შემდეგ გავუტოლოთ ის ნულს და ამოვხსნათ მიღებული ალგებრული განტოლება:

$$f'(x) = 2x - 4; \qquad 2x - 4 = 0; \qquad x = 2.$$

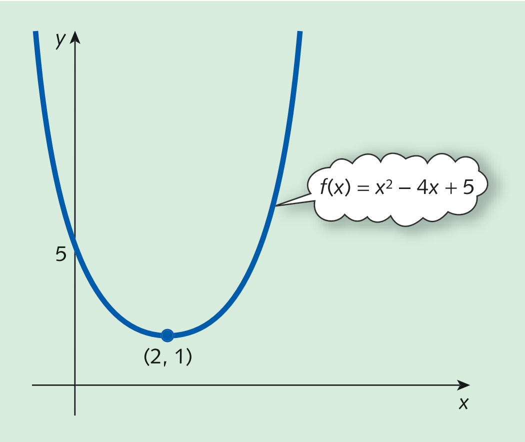
ახლა გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x) = 2.$$

ვინაიდან, მეორე რიგის წარმოებული მუდმივი ფუნქციაა, ამიტომ $f''(2) = 2 > 0$. შესაბამისად, სტაციონალური წერტილი 2 წარმოადგენს $f$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილს. ხოლო ფუნქციის მინიმალურ მნიშვნელობას მივიღებთ, თუ ფუნქციაში ჩავსვამთ ამ წერტილს:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1.$$

ამგვარად, ფუნქციის გრაფიკის მინიმუმის წერტილია (2,1). მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი ნაჩვენებია 11.2 სურათზე.




სურ 11.2: მინიმუმის წერტილი

ბ) ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული, მიღებული გამოსახულება გავუტოლოთ ნულს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება, რითაც ვიპოვით სტაციონალურ წერტილებს:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12; \qquad 6x^2 + 6x - 12 = 0;$$

მივიღეთ კვადრატული განტოლება. მისი ამონახსნებია $x = -2$ და $x = 1$. ამ სტაციონალური წერტილების დასახასიათებლად გამოვთვალოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და დავადგინოთ მისი ნიშანი მოცემულ სტაციონალურ წერტილებში.

$$f''(x) = 12x + 6; \qquad f''(-2) = -18 < 0; \qquad f''(1) = 18 > 0.$$

ამგვარად, დავადგინეთ, რომ წერტილი -2 წარმოადგენს ლოკალური მაქსიმუმის წერტილს, ხოლო წერტილი 1 წარმოადგენს ლოკალური მინიმუმის წერტილს. მაშასადამე, გრაფიკზე ლოკალური მაქსიმუმი და მინიმუმი იქნება, შესაბამისად, (-2,24) და (1,-3) წერტილები(იხ. სურათი 11.3).

მოცემული ფუნქციის მინიმუმისა და მაქსიმუმის პოვნის ამოცანა უკავშირდება ე.წ. ოპტიმიზაციის ამოცანებს. აღნიშნული თემა მეტად მნიშვნელოვანია მათემატიკური ეკონომიკისთვის.

**მაგალითი 11.2** *მოცემულია ფირმის მოკლევადიანი წარმოების ფუნქცია $Q = 6L^2 - 0.2L^3$, სადაც $L$ აღნიშნავს მუშახელის რაოდენობას.*

- *ა) გაარკვიეთ, რა რაოდენობის მუშახელი უზრუნველყოფს წარმოების მაქსიმალურ ეფექტურობას(ანუ მაქსიმალურ წარმადობას);*
- *ბ) გაარკვიეთ, რა რაოდენობის მუშახელი უზრუნველყოფს მუშახელზე საშუალო წარმოების მაქსიმალურ ოდენობას. გამოთვალეთ ამ მნიშვნელობისთვის მარგინალური -$MP_L$ და საშუალო-$AP_L$ პროდუქტიულობა. გაანალიზეთ მიღებული მნიშვნელობები.*

**ამოხსნა.**

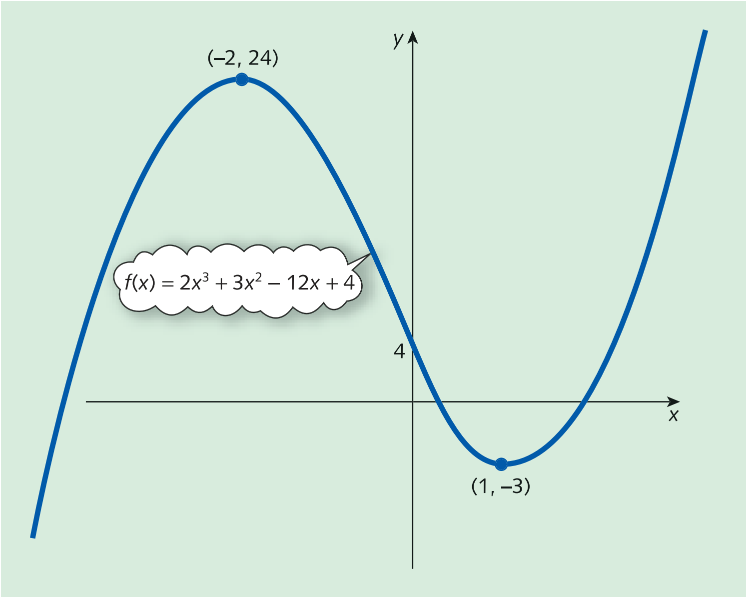
ა) ამ ნაწილში ჩვენი ამოცანაა, ვიპოვოთ $L$-ის ის მნიშვნელობა, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ წარმადობას. ამისათვის ჯერ ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის სტაციონალური წერტილები:

$$\frac{dQ}{dL} = 12L - 0.6L^2; \quad 12L - 0.6L^2 = 0; \quad L = 0; \ L = 20.$$

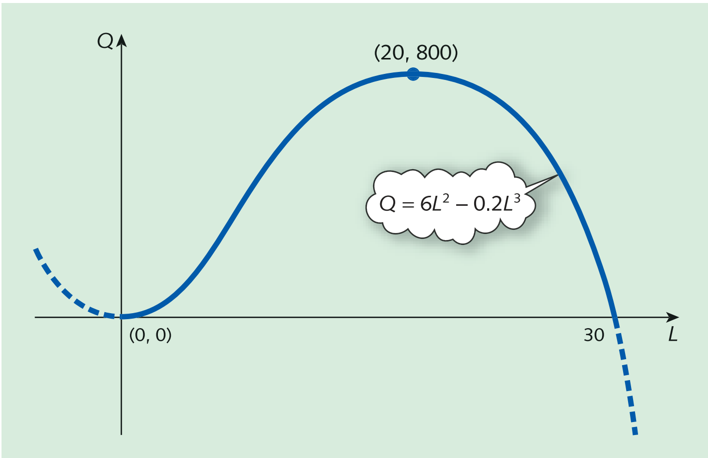
ახლა კი გამოვთვალოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და დავახასიათოთ მიღებული სტაციონალური წერტილები:

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = 12 - 1.2L; \quad \frac{d^2Q}{dL^2}(0) = 12 > 0; \quad \frac{d^2Q}{dL^2}(20) = -12 < 0.$$

ამრიგად, ვასკვნით, რომ როცა $L = 0$ მაშინ წარმოება არის მინიმალური, ხოლო როცა $L = 20$, მაშინ წარმოება არის მაქსიმალური. ამგვარად, ფირმამ უნდა დაიქირაოს 20 თანამშრომელი და ამ შემთხვევაში წარმოება იქნება $Q = 6 \cdot (20)^2 - 0.2 \cdot (20)^3 = 800$.




სურ 11.3: კუბური ფუნქციის გრაფიკი




სურ 11.4: წარმოების ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი

ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ გრაფიკის მინიმალური წერტილის კოორდინატებია (0,0) ხოლო მაქსიმალური წერტილის კოორდინატებია (20,800) იხილეთ სურათი 11.4.

ბ) მეორე ამოცანაში უნდა განვიხილოთ მუშახელის საშუალო პროდუქტიულობა. ამისთვის მთლიანი ნაწარმი უნდა შევაფარდოთ მუშახელის რაოდენობასთან. ანუ,

$$AP_L = \frac{Q}{L}.$$

ამ სიდიდეს ხშირად მუშახელის პროდუქტიულობასაც უწოდებენ. ჩვენი მაგალითისთვის კი მუშახელის საშუალო პროდუქტიულობის მაჩვენებელი ფუნქცია იქნება $AP_L = 6L - 0.2L^2$. ჩვენი მიზანია, ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, ამისათვის კი, უნდა ვიპოვოთ სტაციონალური წერტილი და დავახასიათოთ იგი:

$$\frac{d(AP_L)}{dL} = 6 - 0.4L; \qquad 6 - 0.4L = 0; \qquad L = 15.$$

$$\frac{d^2(AP_L)}{dL^2} = -0.4 < 0.$$

აქედან კი ვასკვნით, რომ სტაციონალურ $L = 15$ წერტილში მიიღწევა მაქსიმუმი და შესაბამისი მუშახელის პროდუქტიულობა არის $AP_L(15) = 45$.

საბოლოოდ დასათვლელი დაგვრჩა $MP_L(15)$. ამისათვის კი გვჭირდება $MP_L$ ფუნქციის გამოსახულება, მის მისაღებად $Q$ უნდა გავაწარმოოთ $L$-ის მიმართ.

$$MP_L = 12L - 0.6L^2; \qquad MP_L(15) = 45.$$

შევნიშნოთ, რომ $L = 15$ წერტილში $MP_L$ და $AP_L$ ფუნქციების მნიშვნელობები ემთხვევა ერთმანეთს.

ამ კონკრეტულ მაგალითზე ვნახეთ, რომ მუშახელის პროდუქტიულობის მაქსიმუმის წერტილზე მუშახელის მარგინალური პროდუქტიულობა და მუშახელის საშუალო პროდუქტიულობა ერთმანეთს ემთხვევა. მოგვიანებით ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ეს სამართლიანია ნებისმიერი პროდუქციის ფუნქციისთვის.

**მაგალითი 11.3** *პროდუქტზე მოთხოვნის განტოლებაა $P + Q = 30$, ხოლო სრული დანახარჯის ფუნქციაა $TC = \frac{Q^2}{2} + 6Q + 7$.*

- *ა) იპოვეთ მიწოდების ის მნიშვნელობა, რომელიც უზრუნველყოფს მთლიანი ამონაგების მაქსიმალურ სიდიდეს.*
- *ბ) იპოვეთ მიწოდების ის მნიშვნელობა, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას. $Q$-ს ამ მნიშვნელობისთვის გამოთვალეთ $MR$ და $MC$. გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.*

**ამოხსნა.**

ა) ამოცანაში უნდა დავადგინოთ $Q$-ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური, ამისათვის გავიხსენოთ, რომ $TR = P \cdot Q$. ამოცანაში მოცემული განტოლებიდან გამოვსახოთ $P$ და ჩავსვათ ბოლო ფორმულაში. მივიღებთ: $TR = 30Q - Q^2$. ვიპოვოთ სტაციონალური წერტილი და დავახასიათოთ იგი:

$$\frac{d(TR)}{dQ} = 30 - 2Q; \quad 30 - 2Q = 0; \quad Q = 15.$$

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2} = -2 < 0.$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ $Q = 15$ წერტილში მთლიანი ამონაგები არის მაქსიმალური.

ბ) ამოცანის ამ ნაწილში უნდა ვიპოვოთ $Q$-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოგება არის მაქსიმალური. ამისათვის დავწეროთ მოგების ფუქნცია $\Pi = TR - TC$. შესაბამისად გვექნება:

$$\Pi = 30Q - Q^2 - \frac{Q^2}{2} - 6Q - 7 = -\frac{3}{2}Q^2 + 24Q - 7.$$

დავადგინოთ მაქსიმუმის წერტილი:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = -3Q + 24; \qquad -3Q + 24 = 0; \qquad Q = 8.$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = -3 < 0.$$

ამგვარად, $Q = 8$ მნიშვნელობისთვის მოგება არის მაქსიმალური და $\Pi(8) = 89$. ჩვენ დასათვლელი დაგვრჩა მარგინალური ამონაგებისა და მარგინალური დანახარჯის მნიშვნელობები როცა $Q = 8$:

$$MR = \frac{d(TR)}{dQ} = 30 - 2Q; \qquad MR(8) = 14.$$

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ} = Q + 6; \qquad MC(8) = 14.$$

შევნიშნოთ, რომ $Q = 8$ მნიშვნელობისთვის მარგინალური ამონაგები და მარგინალური ხარჯი ერთმანეთის ტოლია. ამ მაგალითიდან ვნახეთ, რომ წერტილში, რომელშიც მოგება მაქსიმალურია, მარგინალური ამონაგები ტოლია მარგინალური დანახარჯის. მოგვიანებით ვაჩვენებთ, რომ აღნიშნული ფაქტი სამართლიანია ნებისმიერი მოგების ფუნქციისთვის.

**მაგალითი 11.4** *$x$ სართულიანი საოფისე ნაგებობის მშენებლობის ხარჯები შედგება სამი კომპონენტისგან:*

- *10 მილიონი ლარი მიწისთვის;*
- *250000 ლარი თითოეული სართულის მშენებლობა;*
- *10000$x$ ლარი თითოეულ სართულზე სპეციალური ხარჯი.*

*რამდენ სართულიანი უნდა იყოს ნაგებობა, რომ საშუალო ხარჯი თითოეულ სართულზე იყოს მინიმალური?*

**ამოხსნა.** მიწის ღირებულება ფიქსირებული ხარჯია, თითოეული სართულის ღირებულებიდან გამომდინარე კი $x$ სართული ეღირება $250000x$ ლარი, ხოლო თუ სპეციალური ხარჯი თითოეულ სართულზე $10000x$-ს შეადგენს, მაშინ მთელი შენობისთვის სპეციალური ხარჯი იქნება $10000x^2$ ლარი. შესაბამისად მთლიანი დანახარჯი იქნება

$$TC = 10000000 + 250000x + 10000x^2.$$

საშუალო ხარჯი თითოეულ სართულზე იქნება მთელი ხარჯი შეფარდებული სართულების რაოდენობასთან:

$$AC = \frac{TC}{x} = \frac{10000000 + 250000x + 10000x^2}{x} = \frac{10000000}{x} + 250000 + 10000x.$$

რომ ვიპოვოთ $x$-ის თუ რა მნიშვნელობისთვის იქნება $AC$ მინიმალური, ამისათვის ვიპოვოთ ამ ფუნქციის სტაციონალური წერტილები და დავახასიათოთ ისინი.

$$\frac{d(AC)}{dx} = -\frac{10000000}{x^2} + 10000; \quad 10000 - \frac{10000000}{x^2} = 0; \quad x = \sqrt{1000}.$$

ცხადია, ჩვენ უგულვებელვყობთ უარყოფით ამონახსნს. იმაში დასარწმუნებლად, რომ მიღებული წერტილი მინიმუმის წერტილია, განვიხილოთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$\frac{d^2(AC)}{dx^2}=\frac{20000000}{x^3};\qquad \frac{d^2(AC)}{dx^2}(\sqrt{1000})=\frac{20000000}{1000^{3/2}}>0.$$

მართლაც, ვინაიდან, მეორე რიგის წარმოებული ამ წერტილში დადებითია, ესე იგი, ეს წერტილი წარმოადგენს მინიმუმის წერტილს.

ამოცანა მათემატიკურად ზუსტად არის ამოხსნილი, მაგრამ $\sqrt{1000}$ არ არის მთელი რიცხვი და ფიზიკურად შეუძლებელია ამგვარი რაოდენობის სართულების აგება. ამიტომ ჩვენ მიახლოებით შევაფასებთ ამ რიცხვს: $x\approx 31.6$. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ $AC$ რომელ წერტილში უფრო ნაკლები იქნება, 31 თუ 32-ში, ჩავსვათ ისინი შესაბამის გამოსახულებაში და მიღებული სიდიდეები შევადაროთ:

$$AC(31)\approx 882580;\qquad AC(32)\approx 882500.$$

მაშასადამე, 32 სართულიანი შენობის აგების შემთხვევაში იქნება ყველაზე იაფი თითოეული სართულის მშენებლობის საშუალო ფასი.

**მაგალითი 11.5** *მიწოდების ფუნქციაა $P=Q_S+8$, ხოლოც მოთხოვნის $P=-3Q_D+80$. მთავრობამ გადაწყვიტა, შემოიღოს $t$ ლარის ოდენობის გადასახადი პროდუქციის ერთეულზე. დაადგინეთ $t$-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სახელმწიფო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს იმ დაშვებით, რომ ბაზარი იმყოფება წონასწორობაში.*

***ამოხსნა.*** *იმისათვის, რომ გავითვალისწინოთ გადასახადი $t$, მიწოდების ფუნქციაში $P$ ჩავანაცვლოთ $P-t$-თი. ამგვარად, $P=Q_S+8+t$. ვინაიდან, ბაზარი წონასწორობაშია, $Q_S=Q_D$ და აღვნიშნოთ ეს სიდიდე $Q$ სიმბოლოთი. მაშინ განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:*

$$P=Q+8+t;\qquad P=-3Q+80.$$

*შესაბამისად,*

$$Q+8+t=-3Q+80;\qquad 4Q=72-t;\qquad Q=18-t/4.$$

*ამგვარად, თუ პროდუქტის რაოდენობა, რომელიც გაიყიდა, არის $Q$ და თითოეულ პროდუქტზე სახელმწიფომ დააწესა $t$ ლარის გადასახადი, მაშინ სახელმწიფოს მხრიდან მთლიანად მიღებული გადასახადი იქნება $T=Q\cdot t=(18-t/4)t=18t-t^2/4$ ლარი. მივიღეთ გამოსახულება, რომლის მაქსიმუმის პოვნაც გვსურს. ვიპოვოთ სტაციონალური წერტილები და შევაფასოთ.*

$$\frac{dT}{dt}=18-t/2;\qquad 18-t/2=0;\qquad t=36.$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}=-1/2<0.$$

*ეს კი ადასტურებს, რომ $t=36$ ლარი არის გადასახადის ის მნიშვნელობა, რომლის შემთხვევაში სახელმწიფო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს.*

## 11.1 სავარჯიშოები

1. იპოვეთ და დაახასიათეთ მოცემული ფუნქციების სტაციონალური წერტილები და დახაზეთ მათი გრაფიკის ესკიზები.

$$y = 3x^2 + 12x - 35; \quad y = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 27; \quad y = -x^2 + x + 1;$$

$$y = x^2 - 4x + 4; \quad y = x^2 - 20x + 105; \quad y = -x^3 + 3x.$$

2. აჩვენეთ, რომ მოცემულ ფუნქციებისთვის სტაციონალური წერტილია ნული, შეამოწმეთ, რომ თითოეულ შემთხვევაში $f''(0) = 0$. დაახასიათეთ ეს წერტილები ფუნქციათა გრაფიკების ესკიზების საშუალებით.

$$f(x) = x^3; \qquad f(x) = x^4; \qquad f(x) = -x^6.$$

3. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = 40 - 2Q$, იპოვეთ $Q$-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მთლიანი ამონაგები არის მაქსიმალური.

4. ფიქსირებული დანახარჯი არის 15, ხოლო ცვლადი დანახარჯი - $2Q$. ჩაწერეთ $TC$, $AC$ და $MC$ ფუნქციები. იპოვეთ $Q$-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $AC$ არის მინიმალური და დარწმუნდით, რომ ამ წერტილში $AC = MC$.

5. ფირმის შრომის ნაყოფიერების ფუნქციაა $Q = 30L^2 - 0.5L^3$. იპოვეთ $L$-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $AP_L$ არის მაქსიმალური და დარწმუნდით, რომ ამ წერტილში $MP_L = AP_L$.

6. ფირმის წარმოების ფუნქციაა $Q = 300L^2 - L^4$, სადაც $L$ აღნიშნავს მუშახელის რაოდენობას. დაადგინეთ, რა რაოდენობის მუშახელი უზრუნველყოფს საშუალო პროდუქტიულობის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. შეამოწმეთ ამ მნიშვნელობისთვის $AP_L = MP_L$ ტოლობა.

7. მოცემულია პროდუქტის მოთხოვნის განტოლება $P + 2Q = 20$. ამასთან სრული დანახარჯის ფუნქციაა $TC = Q^3 - 8Q^2 + 20Q + 2$.

   - ა) პროდუქციის რა რაოდენობისთვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური?;
   - ბ) იპოვეთ მოგების მაქსიმალური მნიშვნელობა და $Q$-ს ის მნიშვნელობა, რომელშიც იგი მიიღწევა. დარწმუნდით, რომ $Q$-ს ამ მნიშვნელობისთვის $MR = MC$.

8. მთლიანი დანახარჯის ფუქნციაა $TC = Q^2 + 3Q + 36$. იპოვეთ $Q$-ს ის რაოდენობა, რომლისთვისაც საშუალო ხარჯი იქნება მინიმალური. გამოთვალეთ $AC$ და $MC$ ამ რაოდენობისთვის. დააკვირდით მიღებულ მნიშვნელობებს.

9. მიწოდების ფუნქციაა $P = Q_S/2 + 25$, ხოლოც მოთხოვნის $P = -2Q_D + 50$. მთავრობამ გადაწყვიტა, შემოიღოს $t$ გადასახადი პროდუქციის ერთეულზე. დაადგინეთ $t$-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სახელმწიფო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს იმ დაშვებით, რომ ბაზარი იმყოფება წონასწორობაში.

10. ფიქსირებული დანახარჯია 13, ცვლადი დანახარჯი- $Q + 2$. ჩაწერეთ საშუალო დანახარჯის ფუნქცია $AC$.

- ა) გამოთვალეთ $AC$ ფუნქციის მნიშვნელობები, როცა $Q \in \{1, 2, ..., 6\}$. მონიშნეთ ეს წერტილები $AC$ ფუნქციის გრაფიკის ესკიზზე;
- ბ) გამოიყენეთ აგებული გრაფიკი საშუალო ხარჯის ფუნქციის მინიმუმის შესაფასებლად;
- გ) გამოიყენეთ წარმოებული, რათა დარწმუნდეთ იმ შეფასების სამართლიანობაში, რომელიც მიიღეთ ბ) პუნქტში.

11. ელექტრული მოწყობილობების მწარმოებელმა კომპანიამ ახალი პროდუქტი წარმოადგინა 1 იანვარს. აღნიშნულ პროდუქტზე მთელი წლის განმავლობაში შეკვეთების $S$ რაოდენობა გამოსვლიდან $t$ დღეს განისაზღვრება $S = t^2 - 0.002t^3$ ფორმულით. გაარკვიეთ:
    - ა) რა იქნება შეკვეთების მაქსიმალური რაოდენობა დღეში და რომელ დღეს იქნება იგი?
    - ბ) გამოსვლიდან მერამდენე დღეს იქნება შეკვეთების ყველაზე სრაფი ზრდა?

12. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = \sqrt{1000 - 4Q}$. $Q$-ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური?

13. მოთხოვნისა და მთლიანი დანახარჯის ფუნქციებია, შესაბამისად, $4P+Q-16 = 0$ და $TC = 4 + 2Q - \frac{3Q^2}{10} + \frac{Q^3}{20}$.
    - ა) ჩაწერეთ $TR$, $\Pi$, $MR$ და $MC$ ფუნქციები $Q$-ს ტერმინებში;
    - ბ) იპოვეთ $\Pi$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი;
    - გ) შეამოწმეთ, რომ მოგების ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილში $MR = MC$.

14. პროდუქტის მიწოდებისა და მოთხოვნის ფუქნციებია, შესაბამისად, $3P - Q_S = 3$ და $2P + Q_D = 14$. მთავრობამ გადაწყვიტა, დააწესოს $t$ ლარის ოდენობის გადასახადი პროდუქციის ერთეულზე. იპოვეთ $t$-ს ის მნიშვნელობა, რომელიც უზრუნველყოფს სახელმწიფო გადასახადის მთლიანი ამონაგების მაქსიმუმს, იმ დაშვებით, რომ ბაზარი იმყოფება წონასწორობაში.

# ლექცია 12

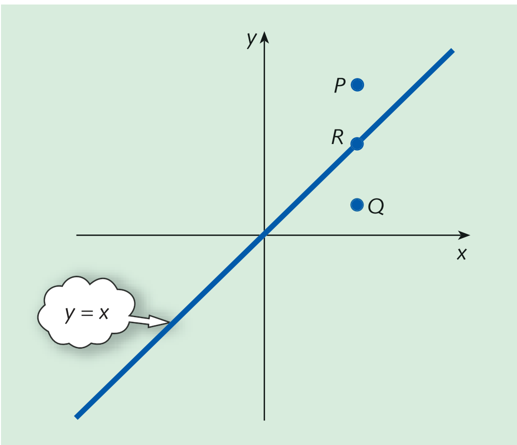
# წრფივი პროგრამირების ელემენტები

ამ ლექციაში განვიხილავთ წრფივი პროგრამირების მათემატიკურ საფუძვლებს.

## 12.1 წრფივ ორცვლადიან უტოლობათა სისტემის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

წრფივი პროგრამირების ამოცანების განხილვამდე გავეცნოთ ორი ცვლადის შემცველი წრფივი უტოლობის გეომეტრიული (გრაფიკული) ინტერპრეტაციის საკითხს. როგორც ცნობილია, $dx + ey = f$ სახის წრფივი განტოლება გეომეტრიულად წრფეს წარმოადგენს. განვიხილოთ ორცვლადიანი უტოლობების ინტერპრეტაციის საკითხი, როცა ტოლობის ნიშანი იცვლება ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი ნიშნით: $<$ (ნაკლებია), $\leqslant$ (ნაკლებია ან ტოლი), $>$ (მეტია), $\geqslant$ (მეტია ან ტოლი).

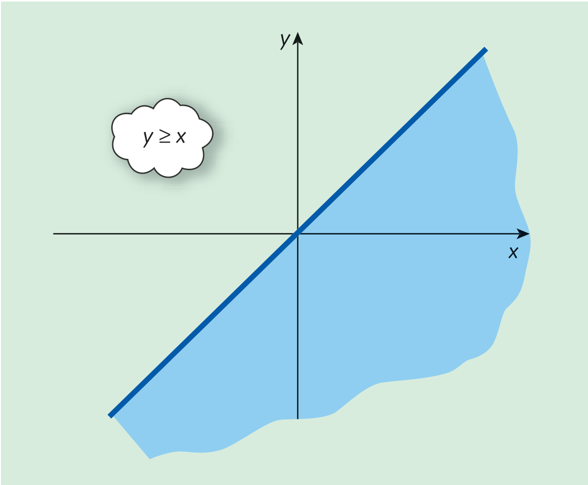
განვიხილოთ $y \geqslant x$ უტოლობა და გავარკვიოთ საკოორდინატო სიბრტყის რომელი წერტილები აკმაყოფილებენ მას. ცხადია, რომ ეს დაკავშირებულია $y = x$ წრფესთან. კერძოდ, თუ $P$ წერტილი ამ წრფის ზემოთაა, $y$ კოორდინატი მეტია $x$-ზე, ანუ $y > x$. თუ $Q$ წერტილი წრფის ქვემოთაა, მაშინ $y$ ნაკლებია $x$-ზე, ანუ $y < x$, ხოლო თუ $R$ წერტილი ამ წრფეზეა, მაშინ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ $y = x$ ტოლობას (სურათი 12.1).




სურ 12.1

აქედან ჩანს, რომ $y \geqslant x$ უტოლობა სრულდება ყველა ისეთი წერტილისთვის, რომელიც ძევს $y = x$ წრფეზე ან მის ზემოთაა. გრაფიკული გამოსახვისთვის ჩვენ გავამუქებთ

სიბრტყის იმ ნაწილს (ნახევარსიბრტყეს), რომლისთვისაც უტოლობა მცდარია (სურათი 12.2). ეს შეიძლება უცნაურად მოგვეჩვენოს, მაგრამ ამის მიზეზი ქვემოთ გახდება ცნობილი.



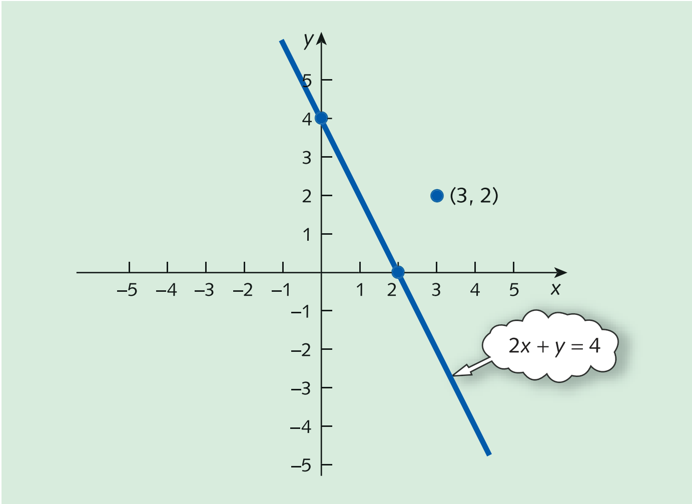

სურ 12.2

საზოგადოდ, $dx+ey<f$, $dx+ey\leqslant f$, $dx+ey>f$ და $dx+ey\geqslant f$ უტოლობების გეომეტრიული ინტერპრეტაციისთვის ჯერ ვაგებთ $dx+ey=f$ წრფეს. ყოველ უტოლობას შეესაბამება ამ წრფით განსაზღვრული ერთ-ერთი ნახევარსიბრტყე. თუ რომელი, ამის გასარკვევად ავიღოთ $dx+ey=f$ წრფეზე არამდებარე ნებისმიერი $(a;b)$ წერტილი(მას "სასინჯ"წერტილსაც უწოდებენ). თუ $a$ და $b$ რიცხვები უტოლობას აკმაყოფილებენ, ვირჩევთ წრფის იმ მხარეს, რომელსაც ეს წერტილი ეკუთვნის, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვირჩევთ მეორე მხარეს(ნახევარსიბრტყეს).

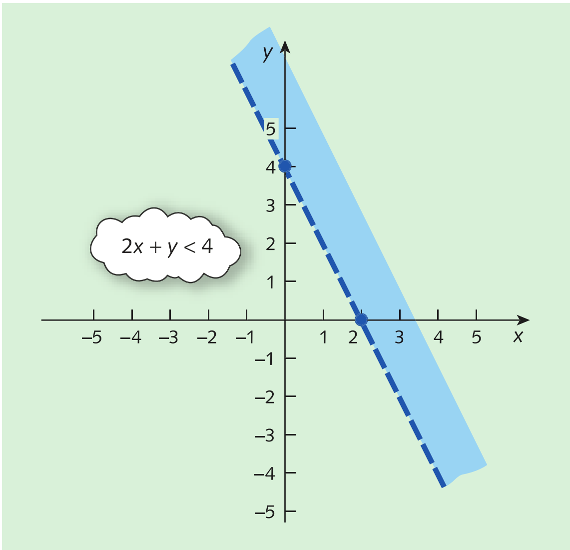
**მაგალითი 12.1** *გამოსახეთ სიბრტყეზე $2x+y<4$ უტოლობით მოცემული სიმრავლე.*

**ამოხსნა.** ჯერ ავაგოთ $2x+y=4$ წრფე. თუ $x=0$, მაშინ $y=4$, თუ $y=0$, მაშინ $x=2$. შესაბამისი წრფე ნაჩვენებია 12.3 სურათზე. "სასინჯ"წერტილად ავიღოთ წერტილი $(3,2)$, ჩავსვათ $2x+y$ გამოსახულებაში, მივიღებთ $2\cdot3+2=8$, რაც მეტია 4-ზე. ე.ი. წერტილი არ აკმაყოფილებს უტოლობას, ამიტომ ჩვენთვის საინტერესო სიმრავლე განთავსებულია წრფის ქვემოთ (სურათი 12.4). წრფის წერტილები ამ სიმრავლეს არ ეკუთვნიან, ამიტომ ამ დროს წყვეტილ წრფეს გამოვიყენებთ.

განვიხილოთ ორცვლადიან უტოლობათა სისტემის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საკითხი. ამ დროს ვეძებთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად აკმაყოფილებენ ამ სისტემაში შემავალ თითოეულ უტოლობას. ანუ, ვეძებთ თითოეული უტოლობით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთას და მას **დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს(დასაშვებ არეს) ვუწოდებთ.**




სურ 12.3




სურ 12.4

**მაგალითი 12.2** *ააგეთ*

$$x + 2y \leqslant 12,$$

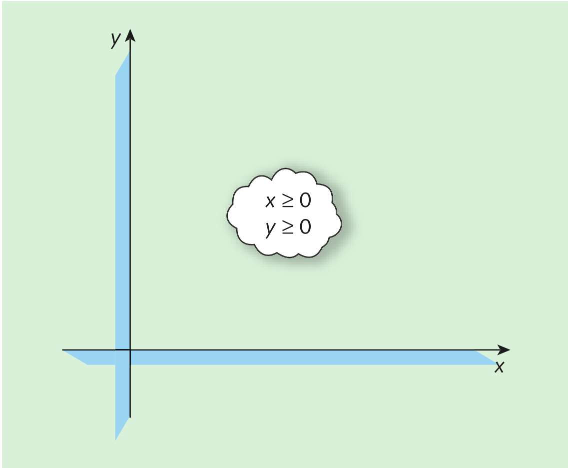
$$-x + y \leqslant 3,$$

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

*უტოლობებით მოცემული სიმრავლე.*

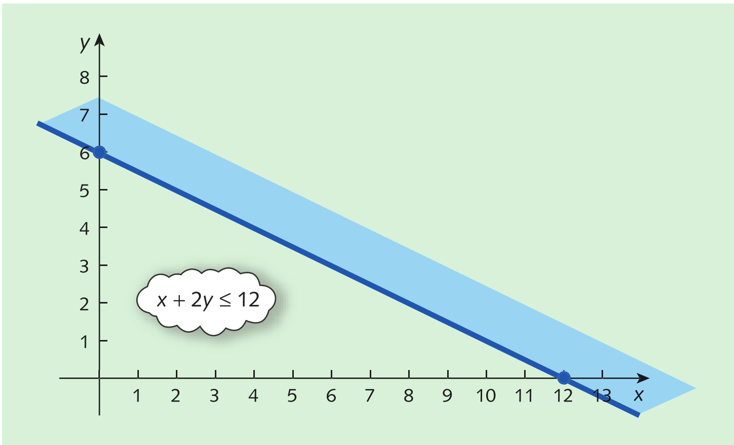
**ამოხსნა.** ბოლო ორი უტოლობა ცვლადების არაუარყოფითობას მიუთითებს, რაც ნიშნავს, რომ ვიხილავთ საკოორდინატო სიბრტყის პირველი მეოთხედის წერტილებს (სურათი 12.5).

$x + 2y \leqslant 12$ უტოლობისთვის ვაგებთ შესაბამის $x + 2y = 12$ წრფეს, სასინჯ წერტილად ავიღოთ წერტილი $(0, 0)$. უტოლობაში ჩასმით ვრწმუნდებით, რომ ეს წერტილი




სურ 12.5

უტოლობას აკმაყოფილებს, ამიტომ ვამუქებთ წრფის ზედა ნახევარსიბრტყეს, როგორც ეს სურათ 12.6-ზეა ნაჩვენები.



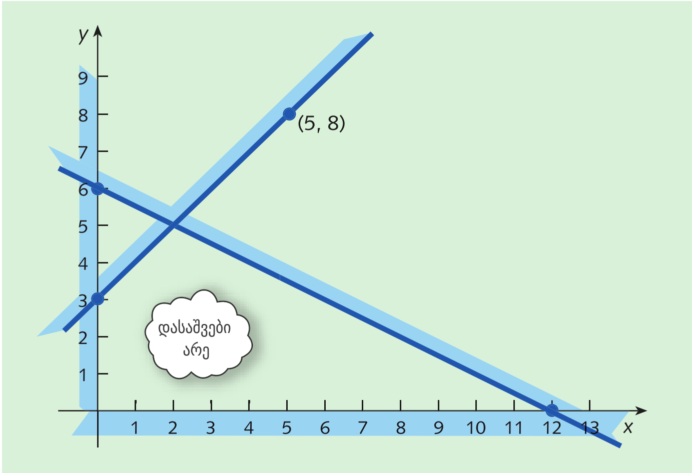

სურ 12.6

შემდეგ ვაგებთ $-x + y = 3$ წრფეს, ისევ ვსვამთ უტოლობაში $(0, 0)$ წერტილს, რომელიც ასევე აკმაყოფილებს უტოლობას. საბოლოოდ ვღებულობთ სურათს, რომელიც სურათ 12.7-ზეა გამოსახული. ყველა იმ $(x, y)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც ოთხივე უტოლობას აკმაყოფილებს, წარმოადგენს ოთხკუთხედს და მოთავსებულია გამუქებული არეების "შუაში".

ამით აიხსნება ის შეთანხმება, რომელიც ზემოთ მივიღეთ და არ გავამუქეთ ჩვენთვის საინტერესო ნახევარსიბრტყე. ამ დროს ჩვენ უნდა ამოგვერჩია "ძლიერად"გამუქებული სიბრტყის ნაწილი, რაც არც ისე მარტივია.

## 12.2 წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი

რას წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ამოცანა და როგორ შეიძლება მისი ამოხსნა გრაფიკულად, გავარკვიოთ კონკრეტულ მაგალითზე დაყრდნობით.



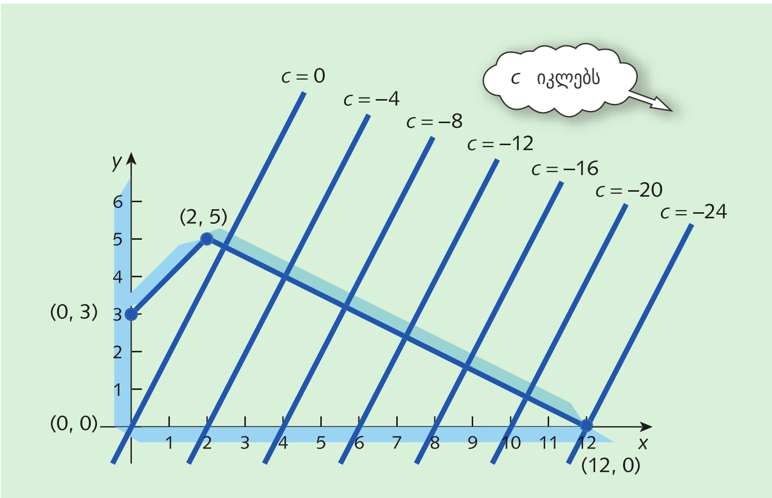

სურ 12.7

**მაგალითი 12.3** *იპოვეთ* $-2x+y$ *გამოსახულების მინიმუმი*
$x+2y \leqslant 12$,
$-x+y \leqslant 3$,
$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ *შეზღუდვების პირობებში.*

**ამოხსნა.** ეს ამოცანა ჩავწეროთ შემდეგი სახით
$-2x+y \to \min$
$x+2y \leqslant 12$,
$-x+y \leqslant 3$,
$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.
საზოგადოდ, წრფივი პროგრამირების ამოცანა ითვლება მოცემულად, თუ გვაქვს:
1. ცვლადები-ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს ორი ცვლადი $x$ და $y$,
2. $ax+by$ სახის გამოსახულება, რომლის მაქსიმუმი ან მინიმუმი გვაინტერესებს. მას **მიზნის ფუნქცია** ეწოდება. ჩვენს მაგალითში $a=-2$, $b=1$.
3. უტოლობები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ ცვლადები. ამ უტოლობებს **შეზღუდვებს** უწოდებენ.
ხშირად, მაგრამ არა ყოველთვის, შეზღუდვებში ფიგურირებს ორი უტოლობა $x \geqslant 0$ და $y \geqslant 0$, რომლებსაც **ცვლადების არაუარყოფითობის პირობას** უწოდებენ.
ამ მაგალითში სულ ოთხი შეზღუდვაა(არაუარყოფითობის პირობის ჩათვლით). როგორც ვნახეთ, გეომეტრიულად $(x, y)$ წერტილები, რომლებიც შეზღუდვებს აკმაყოფილებენ, ქმნიან დასაშვებ სიმრავლეს. ფაქტიურად ეს ნაჩვენებია სურათ 12.7-ზე. ჩვენი ამოცანაა, ვიპოვოთ დასაშვები სიმრავლის ის წერტილი, რომელიც მოახდენს მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციას. ამ პრობლემის გადაწყვეტის ერთ-ერთი გზა შეიძლება იყოს დასაშვები სიმრავლის წერტილების გადარჩევა. ავიღოთ, მაგალითად, წერტილი $(1, 1)$ და ჩავსვათ მიზნის ფუნქციაში $x=1$ და $y=1$ მნიშვნელობები, მივიღებთ:
$-2 \cdot 1+1=-1$
$(3.4, 2.1)$ წერტილის ჩასმა კი გვაძლევს:
$2 \cdot 3.4+2.1=-4.7$, რაც უკეთესი შედეგია.
მაგრამ ამ მეთოდის "ნაკლი"ისაა, რომ დასაშვებ სიმრავლეში წერტილთა უსასრულო რაოდენობაა და ყველას გადარჩევა შეუძლებელია.

შედარებით სისტემური მიდგომა ეყრდნობა $-2x + y = c$ წრფეების აგებას $c$-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის. თან ამ წრფეებს უნდა ჰქონდეთ ერთი საერთო წერტილი მაინც დასაშვებ სიმრავლესთან. ადვილი მისახვედრია, რომ $c$ სწორედ ის რიცხვია, რომლის მინიმიზაციაც გვაინტერესებს. $y = 2x + c$ წრფეს გააჩნია 2-ის ტოლი დახრა და $c$-ს ტოლი $y$-გადაკვეთა. ყველა ეს წრფე ერთმანეთის პარალელურია, $x$ ღერძს კვეთენ $(-\frac{C}{2}; 0)$ წერტილში. სურათ 12.8-დან ჩანს, რომ თუ $c$ მიიღებს მნიშვნელობებს 0-დან -24-მდე, წრფეს ყოველთვის ექნება საერთო წერტილი დასაშვებ არესთან და თუ $c$ იქნება -24 -ზე ნაკლები, მას დასაშვებ არესთან საერთო წერტილი არ ექნება. ამიტომ $c$-ს მინიმალური მნიშვნელობაა -24. ამ დროს $-2x + y = c$ წრფეს დასაშვებ არესთან ექნება ერთი საერთო წერტილი $(12; 0)$- სწორედ ეს წერტილი წარმოადგენს ამოცანის ამონახსნს. დასაშვები არიდან აღებული ყველა სხვა წერტილისთვის მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა -24-ზე მეტი იქნება. ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა დასაშვები არის ერთ-ერთ წვეროში მიიღწევა. ეს შემთხვევით არ მომხდარა, სამართლიანია შემდეგი ფაქტი:

**თუ წრფივი პროგრამირების ამოცანაში არსებობს ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ არსებობს ოპტიმალური წვეროც.**




სურ 12.8

ამ ფაქტზე დაყრდნობით გადარჩევის მეთოდი გარკვეული აზრით ეფექტური ხდება, რადგან საკმარისია ოპტიმალური წერტილი ვეძიოთ დასაშვები არის წვეროებში, რაც თავის მხრივ წერტილთა სასრული რაოდენობის გადარჩევას უკავშირდება.

ჩამოვაყალიბოთ განხილული მეთოდი ბიჯების სახით.

**ბიჯი 1. ააგეთ დასაშვები სიმრავლე.**

**ბიჯი 2. იპოვეთ დასაშვები სიმრავლის წვეროების წერტილები და დაადგინეთ მათი კოორდინატები.**

**ბიჯი 3. გამოთვალეთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები წვეროებში და ამოარჩიეთ ის წერტილი, რომლისთვისაც მიზნის ფუნქცია იღებს მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელობას.**

თუ დავუბრუნდებით განხილულ მაგალითს, მივიღებთ შემდეგ სქემას:

ბიჯი 1. დასაშვები არე ნაჩვენები იყო **სურ. 12.7-ზე**.

ბიჯი 2. გვაქვს ოთხი წვერო $(0,0)$, $(0,3)$, $(2,5)$, $(12,0)$.

ბიჯი 3.

| წვერო | მიზნის ფუნქცია |
|---|---|
| (0,0) | $-2 \cdot 0 + 0 = 0$ |
| (0,3) | $-2 \cdot 0 + 3 = 3$ |
| (2,5) | $-2 \cdot 2 + 5 = 1$ |
| (12,0) | $-2 \cdot 12 + 0 = -24$ |

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ მინიმუმი მიიღწევა $(12, 0)$ წერტილში და ამ დროს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა -24-ის ტოლია. თუ იგივე ამოცანაში მაქსიმუმიც გვაინტერესებს, ბოლო ცხრილიდან ვასკვნით, რომ მაქსიმუმი $(0, 3)$ წერტილში მიიღწევა და ამ დროს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა 3-ის ტოლია.

თუ დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე არაცარიელია, წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნისას შიძლება შეგვხვდეს შემდეგი შემთხვევები:

**1. მიზნის ფუნქცია ოპტიმალურ მნიშვნელობას ერთ წერტილში იღებს.**

**2. ამოცანას გააჩნია მრავალი ოპტიმალური ამონახსნი.**

**3. ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია.**

1. შემთხვევის შესაბამისი მაგალითი უკვე განვიხილეთ. ახლა განვიხილოთ 2 და 3 შემთხვევების შესაბამისი მაგალითები.

მეორე შემთხვევის შესაბამის ქვემოთ მოყვანილ მაგალითში პირდაპირი მსჯელობითაც ჩანს, რომ ამოცანას გააჩნია უამრავი ოპტიმალური ამონახსნი, მაგრამ საილუსტრაციოდ ჩვენ მას მოყვანილი მეთოდით ამოვხსნით.

**მაგალითი 12.4** *ამოხსენით წრფივი პროგრამირების ამოცანა*

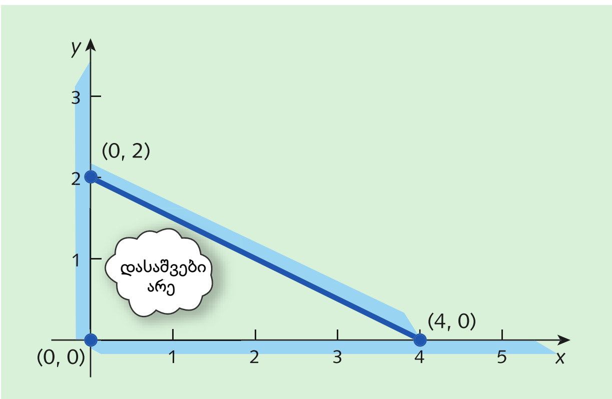
$x + 2y \to \max$

$2x + 4y \leqslant 8,$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

**ამოხსნა.**

ბიჯი 1. დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს აქვს სახე (სურათი 12.9).



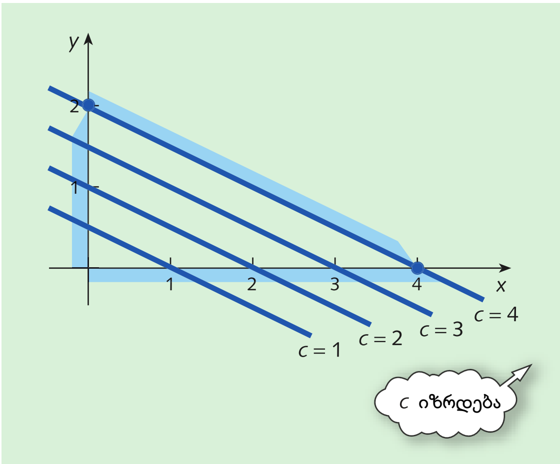

სურ 12.9

ბიჯი 2. დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს აქვს სამი წვერო $(0; 0)$, $(0; 2)$, $(4; 0)$.

ბიჯი 3.

| წვერო | მიზნის ფუნქცია |
|---|---|
| (0,0) | $0+2\cdot 0=0$ |
| (0,2) | $0+2\cdot 2=4$ |
| (4,0) | $4+2\cdot 0=4$ |

ჩანს, რომ მაქსიმალური მნიშვნელობაა 4, რომელიც ორ $(0,2)$ და $(4,0)$ წვეროზე მიიღწევა, ანუ ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი არ აქვს. სურ. 12.10-ზე დაყრდნობით ეს მარტივად აიხსნება. $x+2y=c$ წრფის გადაადგილებისას მარცხნიდან მარჯვნივ $c$-ს მნიშვნელობები იცვლება 0-დან 4-მდე და $x+2y=4$ წრფეს დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლესთან საერთო აქვს როგორც ორი წვეროს წერტილი $(0,2)$ და $(4,0)$, ასევე უამრავი წერტილი, რომლებიც ამ წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთზე მდებარეობენ. ამ დროს ვამბობთ, რომ წრფივი პროგრამირების ამოცანას აქვს მრავალი ოპტიმალური ამონახსნი.




სურ 12.10

**მაგალითი 12.5** *ამოხსენით წრფივი პროგრამირების ამოცანა*

$3x+2y\to\max$

$x+4y\geqslant 8,$

$x+y\geqslant 5,$

$2x+y\geqslant 6,$

$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

**ამოხსნა.**

ბიჯი 1. როგორც წესი, ცვლადების არაუარყოფითობა გვიჩვენებს, რომ ვიხილავთ საკოორდინატო სიბრტყის I მეოთხედს.

$x+4y=8$ წრფე გადის $(0,2)$ და $(8,0)$ წერტილებზე,

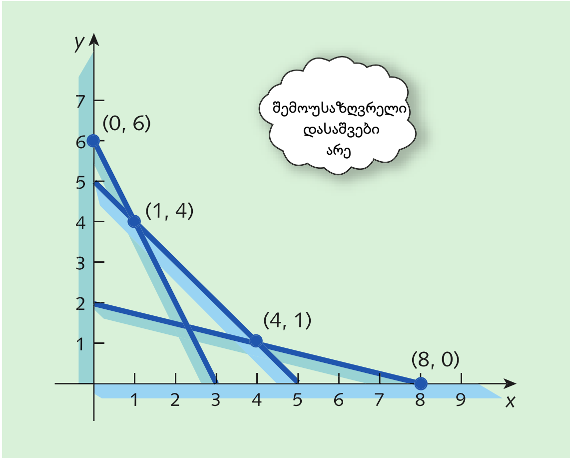
$x+y=5$ წრფე გადის $(0,5)$ და $(5,0)$ წერტილებზე,

$2x+y=6$ წრფე კი გადის $(0,6)$ და $(3,0)$ წერტილებზე.

სასინჯი $(0,0)$ წერტილი არ აკმაყოფილებს არც ერთ უტოლობას, ამიტომ ჩვენ გვაინტერესებს ყველა ამ წრფის ზედა ნახევარსიბრტყეები (სურათი 12.11)

ბიჯი 2. დასაშვებ არეს გააჩნია ოთხი წვერო $(0,6)$, $(1,4)$, $(4,1)$ და $(8,0)$.

ბიჯი 3.




სურ 12.11

| წვერო | მიზნის ფუნქცია |
|---|---|
| (0,6) | $3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$ |
| (1,4) | $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$ |
| (4,1) | $3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14$ |
| (8,0) | $3 \cdot 8 + 2 \cdot 0 = 24$ |

ცხრილიდან ჩანს, რომ მიზნის ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები 11-ისა და 24-ის ტოლია, რომლებიც შესაბამისად $(1, 4)$ და $(8, 0)$ წერტილებში მიიღწევა. თუმცა ჩვენ გარკვეული აზრით არასტანდარტული სიტუაცია მივიღეთ, რადგან დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე ყველა მხრიდან შემოსაზღვრული არ არის. ეს სიმრავლე ვერ მოთავსდება ვერც ერთ სასრულ რადიუსიან წრეში. ამ დროს ვამბობთ, რომ დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე შემოუსაზღვრელია და ამ სიმრავლის წვეროების განხილვას აზრი ეკარგება. თუ განვიხილავთ $3x + 2y = c$ სახის წრფეებს (სურ. 12.12) როცა $c = 11$, წრფეს დასაშვებ სიმრავლესთან აქვს ერთი საერთო წერტილი $(1, 4)$ და როცა $c$ იზრდება, $3x + 2y = c$ წრფეებს ყოველთვის ექნებათ დასაშვებ სიმრავლესთან საერთო წერტილები, საიდანაც ვასკვნით, რომ ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია, რადგან $3x + 2y$ გამოსახულებამ შეიძლება მიიღოს რაგინდ დიდი მნიშვნელობები.

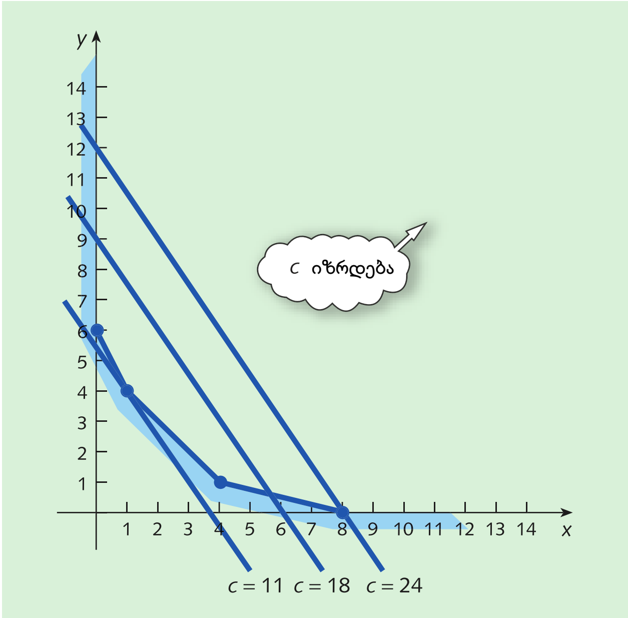
თუ განვიხილავთ მინიმიზაციის ამოცანას, მაშინ ამონახსნი იქნება $(1, 4)$ წვერო.

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ თუ დასაშვები სიმრავლე შემოუსაზღვრელია, მაშინ წრფივი პროგრამირების ამოცანას ამონახსნი შეიძლება არ ჰქონდეს. ხოლო როცა ამონახსნი არსებობს, მაშინ ის შეიძლება ვიპოვოთ წვეროების გადარჩევის გზით. პრაქტიკული ხასიათის ამოცანებში, რომლებიც რეალური ეკონომიკური სიტუაციების ამსახველია, ოპტიმალური ამონახსნი ყოველთვის არსებობს.

## 12.3 სავარჯიშოები.

1. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ $-x + 3y = 6$ წრფე. გამოიყენეთ $(1, 4)$ სასინჯი წერტილი და მიუთითეთ $-x + 3y \geqslant 6$ უტოლობის შესაბამისი არე.

2. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ უტოლობათა სისტემებით განსაზღვრული არე-




სურ 12.12

ები

$$\begin{array}{ccc} a)6x+3y \leqslant 30 & b)2x+5y \leqslant 20 & c)x-2y \leqslant 3 \\ 7x+2y \leqslant 28 & x+y \leqslant 5 & x-y \leqslant 4 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 & x \geqslant 0, y \geqslant 0 & x \geqslant 1, y \geqslant 0 \end{array}$$

3. განიხილეთ წრფივი პროგრამირების ამოცანა

   $-x+y \to \max$

   $3x+y \leqslant 12,$

   $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

   ა) ააგეთ დასაშვები არე,

   ბ) იგივე ნახაზზე ააგეთ $c=-4,-2,0,1$ და $3$ მნიშვნელობებისათვის ხუთი $y=x+c$ სახის წრფე.

   (მითითება:$y=x+c$ სახის წრფეებს აქვთ დახრა 1-ის ტოლი და გადიან $(0,c)$ და $(-c,0)$ წერტილებზე).

   გ) გამოიყენეთ ბ) პუნქტის პასუხები და ამოხსენით წრფივი პროგრამირების მოცემული ამოცანა.

4. ამოხსენით წრფივი პროგრამირების ამოცანები.

$$\begin{array}{cc} a)x-y \longrightarrow \min & b)3x+5y \longrightarrow \max \\ 2x+y \leqslant 2 & x+2y \leqslant 10 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 & x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{array}$$

5. გამოიყენეთ სავარჯიშო 2. -ის პასუხები და ამოხსენით შემდეგი ამოცანები:

$$\begin{array}{ccc} a)4x+9y \longrightarrow \max & b)3x+6y \longrightarrow \max & c)x+y \longrightarrow \max \\ 7x+2y \leqslant 28 & x+y \leqslant 5 & x-y \leqslant 4 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 & x \geqslant 0, y \geqslant 0 & x \geqslant 1, y \geqslant 0 \end{array}$$

6. რა შეიძლება ითქვას სავარჯიშო 5-ის c)-ს ამონახსნის შესახებ, თუ განვიხილავთ მინიმიზაციის ამოცანას? განიხილეთ $x+y=c$ წრფეების ერთობლიობა და პასუხი დაასაბუთეთ.

7. ამოხსენით წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანები

$$\begin{array}{cc} a) 2x+3y \longrightarrow \max & b) -8x+4y \longrightarrow \max \\ 2x+y \leqslant 8 & x-y \leqslant 2 \\ x+y \leqslant 6 & 2x-y \geqslant -3 \\ x+2y \leqslant 10 & x-y \geqslant -4 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 & x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{array}$$

8. ახსენით, შემდეგ ამოცანებს რატომ არ გააჩნია ამონახსნი

$$\begin{array}{cc} a) x+y \longrightarrow \max & b) x+y \longrightarrow \max \\ y \geqslant 2 & 2x-y \geqslant -1 \\ x \leqslant 2 & x-2y \leqslant 2 \\ x-y \leqslant 1 & x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 & \end{array}$$

9. ამოხსენით წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანები

$$\begin{array}{cc} a) 6x+2y \longrightarrow \max & b) x+4y \longrightarrow \max \\ x-y \geqslant 0 & 2x+8y \leqslant 16 \\ 3x+y \leqslant 8 & x \leqslant 6 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 & x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{array}$$

# ლექცია 13

# წრფივი პროგრამირების გამოყენებები

ამ ლექციაში, განვიხილავთ წრფივი პროგრამირების გამოყენების შესაძლებლობას ტიპური ეკონომიკური ამოცანების ამოსახსნელად.

წინა ლექციაში გადმოცემული იყო წრფივი პროგრამირების მარტივი (ორცვლადიანი) ამოცანების ამოხსნის მეთოდი. შეიძლება დაგვრჩეს შთაბეჭდილება, რომ წრფივი პროგრამირება- ეს არის მათემატიკური მეთოდები, რომლებიც გამოიყენება საკმარისად აბსტრაქტული ამოცანების ამოსახსნელად. სინამდვილეში კი, წრფივი პროგრამირების წარმოშობა და განვითარება განპირობებული იყო ეკონომიკური და სხვა ტიპის პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრის აუცილებლობით. ამ ლექციაში განვიხილავთ პრაქტიკული ხასიათის რამდენიმე ამოცანის სიტყვიერ ფორმულირებას, მათი შესაბამისი მათემატიკური მოდელის აგების საკითხებსა და ამოხსნის ეტაპებს.

**მაგალითი 13.1** *მცირე მეწარმე აწარმოებს ორი $A$ და $B$ სახეობის პროდუქციას, რომლებზე მოთხოვნა საწარმოო სიმძლავრეს აღემატება. ერთეული პროდუქციის გასაყიდი ფასი $A$ და $B$ სახეობისათვის შესაბამისად 7 და 4 ლარია, საწარმოო დანახარჯი კი - 6 და 3 ლარი. სატრანსპორტო ხარჯები თითოეული სახეობის პროდუქციის ერთეულისთვის შეადგენს 20 და 30 თეთრს. საბანკო კრედიტის პირობები აიძულებს მეწარმეს, ყოველკვირეული საწარმოო დანახარჯები 2700 ლარით შემოფარგლოს და სატრანსპორტო ხარჯებისთვის გამოიყენოს არაუმეტეს 120 ლარი. როგორ უნდა დაგეგმოს მეწარმემ წარმოება მაქსიმალური მოგების მისაღებად?*

**ამოხსნა.** როგორც ცნობილია, წრფივი პროგრამირების ამოცანების სამი შემადგენელი ნაწილია ცვლადები, მიზნის ფუნქცია და შეზღუდვები. ბუნებრივია, $x$ და $y$-ით აღვნიშნოთ შესაბამისად $A$ და $B$ პროდუქციის წარმოების მოცულობა და ესენი იქნებიან ამოცანის ცვლადები. სიტყვიერი ფორმულირების ბოლო ნაწილში აღნიშნულია, რომ მეწარმემ ისე უნდა შეარჩიოს $A$ და $B$ პროდუქციის მოცულობა, რომ გარანტირებული ჰქონდეს მაქსიმალური შემოსავალი. ამიტომ, უნდა ავაგოთ ფორმულა, რომელიც გამოსახავს შემოსავალს $x$-ისა და $y$-ის ტერმინებში. რადგან $A$ პროდუქციის ერთეულის წარმოების დანახარჯი 6 ლარია, ხოლო სატრანსპორტო ხარჯი 20 თეთრი, სულ დანახარჯი 6.2 ლარია, გასაყიდი ფასი კი 7 ლარია. ამიტომ მოგება ერთეული პროდუქციისათვის შეადგენს 0.8 ლარს. თუ ვაწარმოებთ ამ ტიპის პროდუქციას $x$ რაოდენობით, მოგება იქნება $0.8x$ ლარი. ვინაიდან მოთხოვნა აღემატება წარმოების შესაძლებლობებს, პროდუქციის რეალიზება გარანტირებულია. ანალოგიური მსჯელობით ვრწმუნდებით, რომ $B$ სახეობის $y$ რაოდენობის პროდუქციისათვის მოგება $0.7y$ ლარი იქნება,

ჯამში საერთო მოგება შეადგენს

$$0.8x + 0.7y,$$

რაც წარმოადგენს მიზნის ფუნქციას, რომლის მაქსიმიზაციაც გვაინტერესებს.

შემდეგი საკითხი, რომელიც უნდა გავითვალისწინოთ, უკავშირდება წარმოების შეზღუდვებს. კერძოდ, ყოველკვირეული დანახარჯი წარმოებაზე არ უნდა აღემატებოდეს 2700 ლარს. წარმოების დანახარჯი $A$ სახეობის ერთეულ პროდუქციაზე 6 ლარია, $B$ სახეობისაზე კი 3 ლარი. ცხადია, რომ საერთო დანახარჯი წარმოებაზე იქნება $6x + 3y$ ლარი, რაც არ უნდა აღემატებოდეს 2700 ლარს, საბოლოოდ ვღებულობთ პირველ შეზღუდვას

$$6x + 3y \leq 2700.$$

პროდუქციის გადაზიდვის საერთო დანახარჯები იქნება $0.2x + 0.3y$ ლარი. შედეგად ვღებულობთ მეორე შეზღუდვას

$$0.2x + 0.3y \leq 120.$$

ერთი შეხედვით, შეზღუდვების ნაწილში ყველა მოთხოვნა, რაც ამოცანის სიტყვიერ ფორმულირებაში ფიგურირებდა, გათვალისწინებულია, თუმცა არ უნდა დავივიწყოთ, რომ უარყოფითი რაოდენობის პროდუქცია არ იწარმოება და გვექნება ორი არსებითი შეზღუდვა $x \geq 0$ და $y \geq 0$, რომლებიც სიტყვიერ ფორმულირებაში ცხადად არ ფიგურირებენ.

საბოლოოდ მივიღეთ წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანა:

$$0.8x + 0.7y \to \max,$$

$$6x + 3y \leq 2700,$$

$$0.2x + 0.3y \leq 120,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

ამოვხსნათ მიღებული ამოცანა წინა ლექციაში განხილული მეთოდით.

ბიჯი 1.

ცვლადების არაუარყოფითობის გამო ვიხილავთ მხოლოდ $I$ მეოთხედის წერტილებს.

$6x + 3y = 2700$ წრფე გადის (0,900) და (450,0) წერტილებზე, $0.2x + 0.3y = 120$ კი – (0,400) და (600,0) წერტილებზე.

თუ "სასინჯ"წერტილად გამოვიყენებთ კოორდინატთა სათავეს, დავრწმუნდებით, რომ ჩვენთვის საინტერესო სიმრავლე ამ წრფეების ქვემოთ მდებარეობს (სურათი 13.1).

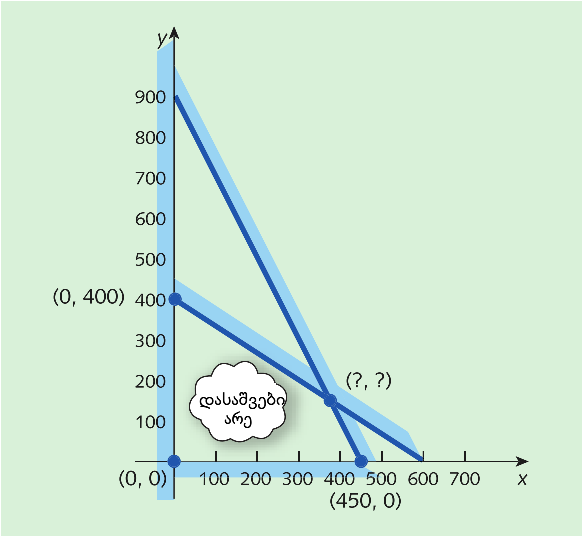
ბიჯი 2.

დასაშვებ სიმრავლეს აქვს ოთხი წვერო, სამი მათგანის კოორდინატები ცნობილია: (0,0), (0,400) და (450,0). მეოთხე წერტილის კოორდინატების გასაგებად უნდა ამოვხსნათ

$$\begin{cases} 6x + 3y = 2700, \\ 0.2x + 0.3y = 120, \end{cases}$$

წრფივ განტოლებათა სისტემა. ეს ამონახსნია (375,150) წერტილი.

ბიჯი 3.




სურ 13.1: დასაშვები არე

| წვერო | მიზნის ფუნქცია |
|---|---|
| (0,0) | 0 |
| (0,400) | 280 |
| (450,0) | 360 |
| (375,150) | 405 |

ცხრილიდან ჩანს, რომ მაქსიმალური შემოსავალი არის 405 ლარი და ის მიიღწევა, როცა ვაწარმოებთ $A$ სახეობის 375 ერთეულ და $B$ სახეობის 150 ერთეულ პროდუქციას.

**მაგალითი 13.2** *საკვები პროდუქტების მწარმოებელი იყენებს ორ $P_1$ და $P_2$ გადამამუშავებელ დანადგარს, რომლებსაც შეუძლიათ კვირაში 7 დღე იმუშაონ. საქონლის ხორცის დამუშავების შედეგად მიიღება უმაღლესი, საშუალო და დაბალი ხარისხის ხორცი. უმაღლესი ხარისხის ხორცს ყასბები ყიდულობენ, საშუალო ხარისხის ხორცი სუპერმარკეტების მზა კერძებში გამოიყენება, ხოლო დაბალი ხარისხის ხორცი – ძაღლის საკვებში. მწარმოებელმა გააფორმა კონტრაქტი 120 კგ უმაღლესი, 80 კგ საშუალო და 240 კგ დაბალი ხარისხის ხორცის მიწოდებაზე ყოველი კვირის განმავლობაში. $P_1$ დანადგარის გამოყენება ერთი დღის განმავლობაში 4000 ლარი ღირს, $P_2$-ის კი 3200 ლარი. $P_1$ დანადგარს შეუძლია ერთ დღეში 60 კგ უმაღლესი, 20 კგ საშუალო და 40 კგ დაბალი ხარისხის ხორცის წარმოება, შესაბამისად $P_2$ დანადგარს 20 კგ, 20 კგ და 120 კგ. რამდენი დღე უნდა ვამუშაოთ თითოეული დანადგარი კვირის განმავლობაში, რომ კონტრაქტი მინიმალური დანახარჯით შევასრულოთ?*

**ამოხსნა.** ვთქვათ, $P_1$ დანადგარი მუშაობს $x$ დღის, $P_2$-კი $y$ დღის განმავლობაში. მაშინ საერთო დანახარჯი იქნება $4000x + 3200y$ ლარი, რომლის მინიმიზაციაც გვაინტერესებს. გავითვალისწინოთ, რომ $P_1$ დანადგარს შეუძლია დღეში 60 კგ უმაღლესი ხარისხის, $P_2$ დანადგარს კი 20 კგ უმაღლესი ხარისხის ხორცის წარმოება. ამიტომ კვირის განმავლობაში ორივე ერთად გამოუშვებს $60x + 20y$ კგ უმაღლესი ხარისხის

ხორცს, შედეგად გვაქვს უტოლობა

$$60x + 20y \geq 120.$$

ანალოგიური მსჯელობით დანარჩენი ორი ხარისხის ხორცისათვის გვექნება უტოლობები

$$20x + 20y \geq 80,$$
$$40x + 120y \geq 240.$$

რადგან კვირაში 7 დღეა, $x$ და $y$ ცვლადებმა უნდა დააკმაყოფილონ პირობები:

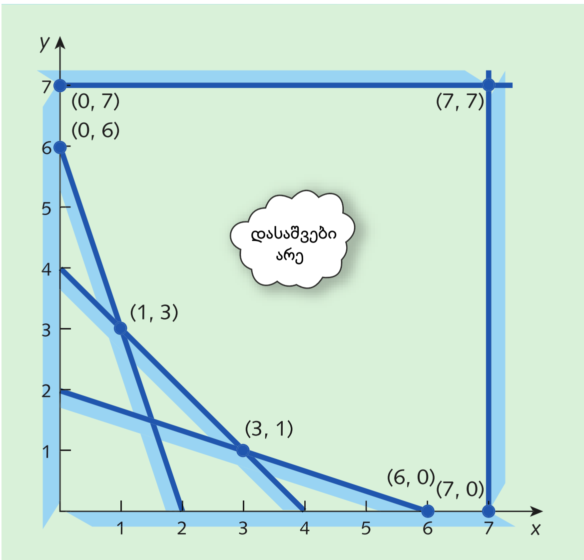
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \leq 7, \quad y \leq 7.$$

საბოლოოდ, ვღებულობთ წრფივი პროგრამირების შემდეგ ამოცანას:

$$4000x + 3200y \to \min,$$

$$60x + 20y \geq 120,$$
$$20x + 20y \geq 80,$$
$$40x + 120y \geq 240,$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \leq 7, \quad y \leq 7.$$

ბიჯი 1. მივაქციოთ ყურადღება იმ ფაქტს, რომ ბოლო ოთხი უტოლობა გვიჩვენებს,




სურ 13.2: დასაშვები არე

რომ დასაშვები არე შემოსაზღვრულია $x = 0$, $x = 7$, $y = 0$ და $y = 7$ ჰორიზონტალური და ვერტიკალური წრფეებით. სასინჯი (0,0) წერტილი არ აკმაყოფილებს პირველი სამი უტოლობიდან არცერთს. ამიტომ დასაშვებ სიმრავლეს აქვს სურათ 13.2-ზე მოცემული სახე.

ბიჯი 2.

დასაშვებ არეს აქვს შვიდი წვერო: (7,0), (7,7), (0,7), (1,3), (3,1), (0,6) და (6,0)

ბიჯი 3.

| წვერო | მიზნის ფუნქცია |
|---|---|
| (7,0) | 28000 |
| (7,7) | 50400 |
| (0,7) | 22400 |
| (0,6) | 19200 |
| (3,1) | 15200 |
| (1,3) | 13600 |
| (6,0) | 24000 |

ცხრილიდან ჩანს, რომ მინიმალური დანახარჯი მიიღწევა მაშინ, როცა $P_1$ დანადგარს გამოვიყენებთ კვირაში 1 დღე, ხოლო $P_2$ დანადგარს კვირაში 3 დღე.

**მაგალითი 13.3** *ტურისტულ კომპანიაში ორი კატეგორიის თანამშრომელია: 1. თანამშრომლები, რომლებიც მუშაობენ სრული სამუშაო დღის განმავლობაში, ანუ კვირაში 40 საათი და მათ უხდიან კვირაში 800 ლარს; 2. თანამშრომლები, რომლებიც მუშაობენ არასრული სამუშაო დღის განმავლობაში, კვირაში 20 საათი და მათ უხდიან 320 ლარს.*

*კომპანიის პოლიტიკის თანახმად, მეორე კატეგორიის თანამშრომლების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს პირველი კატეგორიის თანამშრომლების რაოდენობის 1/3 ნაწილს. კომპანიის ფუნქციონირებისთვის აუცილებელია კვირაში 900 სამუშაო საათი. თითოეული კატეგორიის რამდენი თანამშრომელი უნდა დაიქირაოს კომპანიამ, რომ გასცეს მინიმალური ჯამური ხელფასი?*

**ამოხსნა.** ვთქვათ, კომპანიამ უნდა დაიქირაოს $x$ რაოდენობის პირველი კატეგორიისა და $y$ რაოდენობის მეორე კატეგორიის თანამშრომელი. მაშინ, მათი ჯამური ხელფასი იქნება $800x + 320y$ ლარი. სამუშაო საათების საერთო რაოდენობა იქნება $40x + 20y$, რაც უნდა იყოს 900 საათზე არანაკლები. ასევე მეორე კატეგორიის თანამშრომლების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს პირველი კატეგორიის თანამშრომლების 1/3 ნაწილს, რაც გვაძლევს $y \leq x/3$ უტოლობას. საბოლოოდ, ვღებულობთ წრფივი პროგრამირების შემდეგ ამოცანას:

$$800x + 320y \to \min,$$

$$40x + 20y \geq 900,$$

$$y \leq x/3,$$

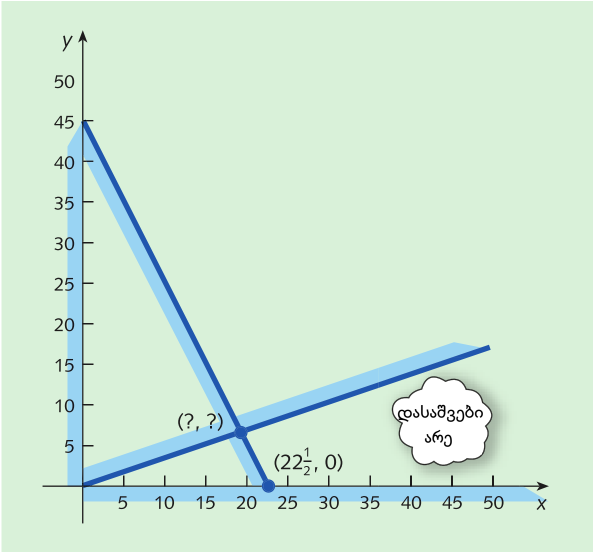
$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

ბიჯი 1.

$40x+20y = 900$ გადის (0,45) და (45/2,0) წერტილებზე. $y = x/3$ წრფე კოორდინატთა სათავეზე გადის, ამიტომ "სასინჯ"წერტილად ავირჩიოთ, მაგალითად, $x = 30$, $y = 5$ წერტილი. თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს შესაბამის უტოლობაში, მივიღებთ: $5 \leq 30/3$, რაც ჭეშმარიტი უტოლობაა. დასაშვებ სიმრავლეს აქვს სურათ 13.3-ზე მოცემული სახე.

ბიჯი 2. დასაშვებ არეს ორი წვერო აქვს. ერთ-ერთია (45/2,0). მეორე წერტილის საპოვნელად კი უნდა ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} y = x/3, \\ 40x + 20y = 900, \end{cases}$$



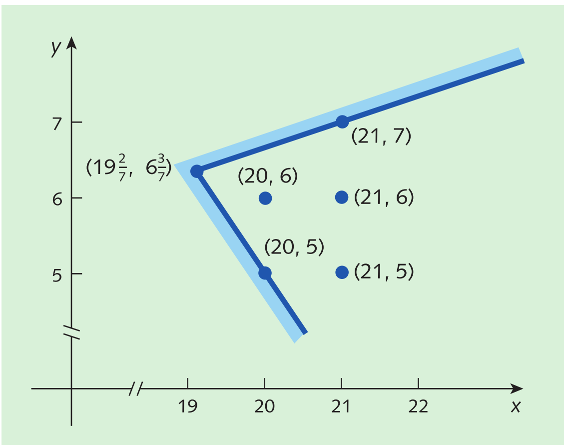

სურ 13.3: დასაშვები არე

რაც გვაძლევს (135/7,45/7) წერტილს.

ბიჯი 3.

| წვერო | მიზნის ფუნქცია |
|---|---|
| (135/7,45/7) | $17485\frac{5}{7}$ |
| (45/2,0) | 18000 |

მინიმუმი მიიღწევა (135/7,45/7) წერტილში და $17485\frac{5}{7}$ ლარის ტოლია. მათემატიკური თვალსაზრისით, ჩვენ დასმული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი მივიღეთ, მაგრამ პრაქტიკულად ამ ამონახსნს ვერ გამოვიყენებთ, რადგან 135/2 თანამშრომლის დაქირავება შეუძლებელია. ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ ისეთი წერტილები, რომლებსაც მთელი კოორდინატები აქვთ. ასეთ ამოცანას **მთელრიცხვა პროგრამირების** ამოცანა ეწოდება. მასში იგულისხმება, რომ $x$ და $y$ ცვლადები მთელ მნიშვნელობებს ღებულობენ, ანუ დასაშვებ არეში უნდა ვიპოვოთ ისეთი მთელ კოორდინატებიანი $(x, y)$ წერტილი, რომელიც მიზნის ფუნქციას მინიმალურ მნიშვნელობას მიანიჭებს (იხ. სურათი 13.4). დასაშვებ სიმრავლეში ვიხილავთ ოპტიმალური წერტილის ყველა "მეზო-




სურ 13.4: ოპტიმალურ წერტილთან უახლოესი მთელ კოორდინატებიანი წერტილები დასაშვებ არეში

ბელ"მთელკოორდინატებიან წერტილს და ვრწმუნდებით, რომ

| წვერო | მიზნის ფუნქცია |
|---|---|
| (20,5) | 17600 |
| (20,6) | 17920 |
| (21,5) | 18400 |
| (21,6) | 18700 |

ოპტიმალურია (20,5) წერტილი, რაც ნიშნავს, რომ კომპანიამ უნდა დაიქირაოს 20 თანამშრომელი სრულ განაკვეთზე, 5 კი არასრულ განაკვეთზე.

ბოლოს შევნიშნავთ, რომ უმეტესობა პრაქტიკული ხასიათის მოდელებში მიღებული წრფივი პროგრამირების ამოცანები შეიცავს ცვლადების საკმარისად დიდ რაოდენობას და, ცხადია, მათ ამოსახსნელად გეომეტრიულ მეთოდს ვერ გამოვიყენებთ. ძალიან ხშირად ამ შემთხვევაში გამოიყენება ე.წ. სიმპლექს-ალგორითმი. ამ ალგორითმის მუშაობის პრინციპში გარკვევა აუცილებლობას არ წარმოადგენს, რადგან საწყისი ინფორმაციის შესაბამისი ინსტრუქციის მიხედვით მომზადების შემთხვევაში შესაძლებელია, დიდგანზომილებიანი ამოცანების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ, მაგალითად Excell-ის საშუალება Solver-ი, ან სხვა პროგრამული პაკეტი.

## 13.1 სავარჯიშოები:

1. ფირმამ გადაწყვიტა გამოუშვას კომპიუტერების ორი ახალი მოდელი: COM1 და COM2. თითოეული ეგზემპლარის წარმოება შესაბამისად 1200 და 1600 ლარი ჯდება. ფირმას მიაჩნია, რომ წარმოება გარკვეულ რისკებთანაა დაკავშირებული და ყოველკვირეული საწარმოო დანახარჯები შემოსაზღვრული აქვს 40000 ლარით. კვალიფიციური მუშახელის დეფიციტის გამო ფირმას კვირაში 30 კომპიუტერზე მეტის გამოშვება არ შეუძლია. თითოეული კომპიუტერის რეალიზაციის მოგება შეადგენს 600 და 700 ლარს, შესაბამისად, COM1 და COM2 მოდელებისთვის. როგორ დაგეგმოს ფირმამ წარმოება მაქსიმალური მოგების მისაღებად?

2. საგამომცემლო კომპანიამ გადაწყვიტა, თავისი წარმოების ნაწილი დაუთმოს ორი სახელმძღვანელოს გამოშვებას, ესენია "მიკროეკონომიკა"და "მაკროეკონომიკა". ერთი ერთეულის რეალიზაცია იძლევა მოგებას 12 ლარს "მიკროეკონომიკის"და 18 ლარს "მაკროეკონომიკის"შემთხვევაში. "მიკროეკონომიკის"ერთი ეგზემპლარის ბეჭდვას სჭირდება 12 წუთი და აწყობას 18 წუთი, შესაბამისად, "მაკროეკონომიკის"ერთ ეგზემპლარს 15 და 9 წუთი. ბეჭდვისთვის გამოყოფილია 9 საათი და აწყობისთვის $10\frac{1}{2}$ საათი. რამდენი უნდა ვაწარმოოთ თითოეული სახეობის სახელმძღვანელო მაქსიმალური მოგების მისაღებად?

3. ფერმერმა უნდა გამოკვებოს ცხოველები მინიმალური დანახარჯებით, მაგრამ თითოეულმა ცხოველმა უნდა მიიღოს არანაკლებ 1.6 კგ ცილა, არანაკლებ 0.3 კგ ამინომჟავა და არაუმეტეს 0.3 კგ კალციუმი დღეში. ხელმისაწვდომი პროდუქტებია თევზის ფქვილი და ხორცის ნარჩენები, რომლებიც შეიცავენ ცილებს, კალციუმსა და ამინომჟავებს (იხ. ცხრილი). თევზის ფქვილი ღირს 0.65 ლარი 1 კგ, ხოლო ხორცის ნარჩენი 0.52 ლარი 1 კგ.

| პროდუქტი 1 კგ | ცილა | კალციუმი | ამინომჟავა |
|---|---|---|---|
| თევზის ფქვილი | 0.6 | 0.05 | 0.18 |
| ხორცის ნარჩენი | 0.5 | 0.11 | 0.05 |

განსაზღვრეთ მინიმალური ღირებულების რაციონი.

4. საწარმო ორი ხარისხის ბეტონს უშვებს. მაღალი ხარისხის ბეტონის ერთი ერთეული შეიცავს 10 კგ ღორღსა და 5 კგ ცემენტს, დაბალი ხარისხისა კი 12 კგ ღორღსა და 3 კგ ცემენტს. საწარმოს მარაგი შეადგენს 1920 კგ ღორღსა და 789 კგ ცემენტს. ერთი ერთეული მაღალი ხარისხის ბეტონის რეალიზაციით მიღებული მოგება შეადგენს 1.2 ლარს, დაბალი ხარისხისა კი 1 ლარს. თითოეული ხარისხის რამდენი ერთეული ბეტონი უნდა გამოუშვას საწარმომ მაქსიმალური მოგების მისაღებად?

5. საქონლის ერთ საბითუმო მიმწოდებელს შეუძლია რეალიზატორს მიაწოდოს პაკეტი, რომელიც შედგება $A$ საქონლის 3 ერთეულისგან, $B$ საქონლის 6 ერთეულისგან, $C$ საქონლის 4 ერთეულისგან და ღირს 20 ლარი. მეორე მომწოდებელს კი - პაკეტი, რომელიც შედგება 12 ერთეული $A$ საქონლისგან, 3 ერთეული $B$ საქონლისგან, 3 ერთეული $C$ საქონლისგან და ღირს 26 ლარი. რეალიზატორს სჭირდება არანაკლებ 396 ერთეული $A$ საქონელი, 288 ერთეული $B$ და 255 ერთეული $C$ საქონელი. რეალიზატორს სურს გაიგოს, თითოეული მომწოდებლის რამდენი პაკეტი უნდა შეუკვეთოს, რომ დანახარჯი იყოს მინიმალური. შევადგინოთ მიზნის ფუნქცია და ჩავწეროთ დასაშვები არე.

6. დიეტოლოგმა უნდა შექმნას საკვების ულუფა, რომელიც შედგება სამი პროდუქტისგან. ცხრილში მოცემულია თითოეული პროდუქტი რამდენ ერთეულ ცილას, ნახშირწყალსა და რკინას შეიცავს, ასევე მოცემულია კალორიულობის მაჩვენებელი

| ინგრედიენტები | პროდუქტი 1 | პროდუქტი 2 | პროდუქტი 3 |
|---|---|---|---|
| ცილა | 5 | 10 | 15 |
| ნახშირწყალი | 2 | 3 | 2 |
| რკინა | 3 | 6 | 1 |
| კალორია | 60 | 142 | 120 |

დიეტოლოგმა უნდა განსაზღვროს თითოეული პროდუქტის რაოდენობა ისე, რომ ულუფაში აღმოჩნდეს არანაკლებ 30 ერთეული ცილა, 8 ერთეული ნახშირწყალი და 10 ერთეული რკინა მინიმალური რაოდენობის კალორიებით. შევადგინოთ მიზნის ფუნქცია და ჩავწეროთ დასაშვები არე.